

## תירגול 3

30 באוקטובר 2013

### אלגברת מטריצות

בכל התרגיל  $\alpha$  מציינ סקלאר משדה  $\mathbb{F}$  ו  $A$  מטריצה

### פעולות במטריצות

סימון:  $M_{m \times n}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^{m \times n}$  אוסף המטריצות בגודל  $m \times n$  עם מקדמים משדה  $\mathbb{F}$ . עבור מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  נסמן את האיבר בשורה ה- $i$  ובעמודה ה- $j$  ב  $(A)_{ij} = a_{ij}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$$

באופן כללי  $(a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$

**0.1 הגדרה**  $A, B$  שתי מטריצות הן שוות אם הן מאותו גודל כלומר  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . ומתקיים לכל  $i, j$   $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ .

פעולות:

1. חיבור/חיסור  
דוגמא  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$   
הגדרה: יהיו  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  אזי החיבור בניהם מוגדר  $(A+B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij}$ .

2. כפל בסקלאר  
דוגמא  $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$   
הגדרה: יהיו  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), \alpha \in \mathbb{F}$  אזי הכפל בניהם מוגדר  $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij}$ .

3. כפל מטריצות  
יהיו  $A, B$  מטריצות אזי הכפל שלהם מוגדר אם העמודות של  $A$  שווה למספר השורות של  $B$  כלומר  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), B \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$  ואז הכפל בניהם  $AB \in M_{m \times p}(\mathbb{F})$ . איך כופלים?

(א) כפל שורה עמודה (הגדרה בסיסית) - מציאת המקדם  $(AB)_{ij}$  יהיו  $(a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n} = A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), (b_{ij})_{i=1, j=1}^{n, p} = B \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$  אזי

הכפל בניהם מוגדר  $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ . כלומר המקום  $i, j$  של המטריצה  $AB$  מתקבל ע"י הכפלת השורה  $i$  של מטריצה  $A$  בעמודה  $j$  של מטריצה

$$B \text{ בהתאמה. } \cdot i \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \text{ דוגמא}$$

אזי  $AB \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ . נחשב 2 מקדמים  $(AB)_{11} = 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = 4$ ,  $(AB)_{21} = -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 5$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & * \\ 5 & * \\ * & * \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

כאן המקום להבהיר את הסימון של  $Ax = b$  - בידקו שאכן  $Ax$  בכפל שהוגדר כעת אכן נותן את מערכת המשוואות הלינארית.

(ב) כפל עמודה עמודה - מציאת עמודה  $C_j(AB)$  כסכום משוקלל של עמודות  $A$  יהיו  $A, B$  כנ"ל העמודה ה- $j$  של  $AB$  היא

$$C_j(AB) = A \cdot C_j(B) = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \\ | & | & | & | \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}_{n \times 1} =$$

$$b_{1j}\vec{a}_1 + b_{2j}\vec{a}_2 + \dots + b_{nj}\vec{a}_n = \sum_{k=1}^n b_{kj}\vec{a}_k \in \mathbb{F}^{m \times 1}$$

$$\text{דוגמא } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ אזי}$$

$$C_2(AB) = A \cdot C_2(B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} +$$

$$2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\text{ובסה"כ } AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 4 \\ * & -11 \end{pmatrix}$$

(ג) כפל שורה שורה - מציאת שורה  $R_i(AB)$  כסכום משוקלל של שורות  $B$ . יהיו  $A, B$  כנ"ל השורה ה- $i$  של  $AB$  היא -

$$R_i(AB) = R_i(A) \cdot B = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}_{1 \times n} \begin{pmatrix} - & \vec{b}_1 & - \\ - & \vec{b}_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{b}_n & - \end{pmatrix}_{n \times p} =$$

$$a_{i1}\vec{b}_1 + a_{i2}\vec{b}_2 + \cdots + a_{in}\vec{b}_n = \sum_{k=1}^n a_{ik}\vec{b}_k \in \mathbb{F}^{1 \times p}$$

דוגמא אוי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$R_3(AB) = R_3(A) \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} + (-7) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -11 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 4 \\ -10 & -11 \end{pmatrix} \text{ ובסה"כ}$$

(ד) כפל עמודה שורה- הצגה הכפל כסכום של מטריצות מאותו הגודל. יהיו  $A, B$  כנ"ל הכפל  $AB$  ניתן להצגה הבאה

$$AB = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \vec{b}_1 & - \\ - & \vec{b}_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{b}_n & - \end{pmatrix} =$$

$$\vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \cdots + \vec{a}_n\vec{b}_n = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k\vec{b}_k \in \mathbb{F}^{m \times p}$$

כל אחד מהמחזורים  $\vec{a}_k\vec{b}_k \in \mathbb{F}^{m \times p}$  ולכן גם החיבור שלהם.

דוגמא אוי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \\ -7 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 4 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}$$

(ה) הערות:

i. התוצאה בכל אחת מדרכי הכפל שווה.

ii. הכפל לא קומטטיבי כלומר יתכן  $AB \neq BA$

דוגמא  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ו  $AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii. כאשר הכפל והחיבור מוגדרים מתקיים:

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{א'. אסוציאטיביות}$$

$$A(B+C) = AB + BC \quad \text{ב'. פילוג}$$

**טענה 0.2** תרגיל: הוכח כפל מטריצות אסוציאטיבי כלומר  $(AB)C = A(BC)$  בהנחה שהכפל מוגדר.

**הוכחה:** פתרון  $(A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), B \in M_{n \times p}(\mathbb{F}), C \in M_{p \times l}(\mathbb{F}))$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^p (AB)_{ik}(C)_{kj} = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^n (A)_{is}(B)_{sk}(C)_{kj}$$

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} \sum_{s=1}^p (B)_{ks}(C)_{sj} = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^p (A)_{ik}(B)_{ks}(C)_{sj}$$

קיבלנו שיוויון. ■

### מטריצות ריבועיות

**הגדרה 0.3** מטריצה ריבועית היא  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ .

הערה: עבור מטריצה ריבועית  $A$  ניתן להגדיר חזקה שלה  $A^n = AA \cdots A$  הכפלת  $A$  פעמים בעצמה.

מטריצות מיוחדות:

$$1. \text{ מטריצת היחידה היא } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ הערה: לכל } A \text{ מתקיים } AI_n = A = I_n A \text{ (בהמשך)}$$

$$2. \text{ מטריצת האפס היא } 0_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ הערה: לכל } A \text{ מתקיים } A + 0_n = A = 0_n + A$$

3. מטריצה משולשית

$$(א) \text{ מטריצה משולשית עליונה היא מהצורה } A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ כלומר } a_{ij} = 0 \text{ לכל } j < i$$

$$(ב) \text{ מטריצה משולשית תחתונה היא מהצורה } A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \text{ כלומר } a_{ij} = 0 \text{ לכל } i < j$$

$$4. \text{ מטריצה אלכסונית היא מהצורה } A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ כלומר } a_{ij} = 0 \text{ לכל } i \neq j$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_n \text{ מטרצה סקלארית היא מהצורה } \alpha I_n \text{ 5.}$$

תרגיל: מטרצה היא משולשית עליונה וגם תחתונה  $\leftrightarrow$  היא אלכסונית.

הוכחה: ישירות מהגדרה.

■

תרגיל: נגדיר  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times 1}$  ובאופן כללי  $e_i = i$  תהא  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  מטרצה.

חשב את  $Ae_1, Ae_i$ .

הוכחה: נשתמש בכפל עמודה-עמודה  $+ 1a_1$

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \cdots + 0\vec{a}_n = \vec{a}_1$$

■

מסקנה:  $AI = A$  הסבר

$$AI = A \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \cdots & A\vec{e}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = A$$

באופן דומה (בעזרת כפל שורה שורה) ניתן להראות ש  $IA = A$ .

#### הגדרה 0.4 מטרצה A תקרא מתחלפת עם B אם $AB = BA$

תרגיל:

הוכח:  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

הוכחה: תרגיל.

תרגיל: מטרצה A מתחלפת עם כל מטרצה A סקלארית

( $\Rightarrow$ ) נתון  $A = \alpha I$  תהא B מטרצה נוספת

אזי  $AB = (\alpha I)B = \alpha(IB) = \alpha(BI) = B(\alpha I) = BA$

( $\Leftarrow$ ) נתון A מתחלפת עם כל מטרצה.

נגדיר  $E_{ij}$  להיות מטרצת אפסים מלבד המקום ה- $ij$  ששווה 1.

דוגמא  $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$E_{ij}A = i \begin{pmatrix} - & 0 & - \\ - & \vec{e}_j & - \\ - & 0 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \vec{r}_1 & - \\ - & \vec{r}_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{r}_n & - \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} - & 0 & - \\ - & \vec{r}_j & - \\ - & 0 & - \end{pmatrix}$$

(כלומר כאשר מכפילים ב  $E_{ij}$  מימין מקבלים את השורה ה- $j$ ית של  $A$  בשורה ה- $i$ ית)

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_n \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ 0 & \vec{e}_i & 0 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ 0 & 0 & \vec{c}_i & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

(כלומר כאשר מכפילים ב  $E_{ij}$  משמאל מקבלים את העמודה ה- $i$ ית של  $A$  בעמודה ה- $j$ ית) כיוון שיש שיוויון  $\Leftarrow$  כל השורה ה  $j$  וכל העמודה ה  $i$  שוות לאפס פרט אולי למקום  $ij$  שמקיים  $A = \alpha I_i \Leftarrow (A)_{jj} = (A)_{ii}$

תרגיל: הוכח כי מכפלה של מטריצות משולשית תחתונות היא מטריצה משולשים תחתונה פתרון נניח  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), B \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$  משולשיות תחתונות יהא  $i < j$  צ"ל  $(AB)_{ij} = 0$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=j}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}0 + \sum_{k=j}^n 0b_{kj} = 0$$

## סימטריות

**הגדרה 0.5** עבור מטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  מגדירים את המטריצה המשוחלפת  $(A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{F}))$  להיות  $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

תרגיל: יהיו  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  הוכח  $(A+B)^t = A^t + B^t$  פתרון: שני המטריצות בשני צידי השיוון מאותו גודל. נשווה רכיבים.  $((A+B)^t)_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}$  ■

תרגיל: יהיו  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  הוכח  $(AB)^t = B^t A^t$  הוכחה: תרגיל.

**הגדרה 0.6** מטריצה  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$  תקרא סימטרית אם  $A^t = A$  ואנטי סימטרית אם  $A^t = -A$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל: הוכח שעבור  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  אנטי סימטרית - באלכסון יש אפסים.

פתרון: נתון  $A^t = -A$  בפרט  $(A)_{ii} = -(A)_{ii}$  ■  $(A)_{ii} = 0$

תרגיל: הוכח שאם  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  אנטי סימטרית וגם סימטרית אזי  $A = 0$ .

פתרון:  $A = 0 \Leftarrow (A)_{ij} = -(A)_{ij} \Rightarrow (A)_{ij} = 0$  ■

תרגיל: יהיו  $A, B$  סימטריות. הוכח  $AB = BA \Leftrightarrow (AB)^t = B^t A^t = BA = AB$  (⇒)

### עקבה של מטריצה

**הגדרה 0.7** תהא  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$   $(a_{ij})_{i=1, j=1}^n = A$  מטריצה. העקבה (trace) של  $A$  מוגדרת

$$tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

כלומר סכום האלכסון הראשי.

$$tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = 1 + 4 = 5$$

למשל

תרגיל : עבור  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$  הוכח:

$$1. \quad tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$$

$$\blacksquare \quad tr(A + B) = \sum_{k=1}^n (a_{kk} + b_{kk}) = \sum_{k=1}^n a_{kk} + \sum_{k=1}^n b_{kk} = tr(A) + tr(B) \quad \text{פתרון:}$$

$$2. \quad trace(AB) = trace(BA)$$

$$trac(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} b_{lk} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{lk} a_{kl} = \sum_{l=1}^n (BA)_{ll} = \text{פתרון}$$

$\blacksquare \quad trace(BA)$