אנליזה 1 תשפ מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sin(2x)\sin(e^x)}{1-\cos(5x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sin(2x)\sin(e^x)}{1-\cos(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{(5x)^2}{1-\cos(5x)}\cdot\sin(e^x)\cdot\frac{x\cdot 2x}{(5x)^2}$$
$$=1\cdot 1\cdot 2\cdot\sin(1)\cdot\frac{2}{25}$$

(ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x^2)}{x+2}$

פתרון: נוציא גורם דומיננטי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x^2)}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\frac{\left(1+\frac{\sin(x^2)}{x}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1+0}{1+0}=0$$

כאשר שני הגבולות ששווים אפס מנומק ע"י כך ש $\frac{1}{x}$ שואף ל 0 (כאשר $x\to\infty$) כפול משהו חסום ($\sin(x^2)$ או 2).

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{e^{(n^2)}}$

פתרון: מתקיים כי

$$\frac{n^n}{e^{(n^2)}}=\frac{n^n}{(e^n)^n}=\left(\frac{n}{e^n}\right)^n$$

נראה כי $\frac{n}{e^n}\to 0$ ולכן גם $\left(\frac{n}{e^n}\right)^n\to 0$. נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n=\frac{n}{e^n}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{n+1}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{e}\to\frac{1}{e}$$

וכיוון ש $\frac{1}{e}<1$ נקבל ש $\lim a_n=0$ כמו שרצינו.

2. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=a$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

ולכן רק עבור $a=\frac{1}{2}$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=\frac{1}{2}$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=0$) אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{1}{2}}{x}\underbrace{=}_{\text{כמו סעיף קודם}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}-\frac{1}{2}}{x}\underbrace{=}_{\frac{0}{0}\text{, L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\left(\sqrt{1+x}+1\right)^{-1}\right]'}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[-1\left(\sqrt{1+x}+1\right)^{-2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right]=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$

כלומר $f'(0)$ קיים ושווה ל 0.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n^2-3a_n+4$ וכן $a_1=\frac{3}{2}$.

(א) הוכיחו הסדרה עולה.

פתרון: לפי הגדרה, לכל n טבעי מתקיים $a_{n+1}=a_n^2-3a_n+4$ ולכן

$$a_{n+1}-a_n=a_n^2-4a_n+4=\left(a_n-2\right)^2\geq 0$$

ולכן $a_{n+1}\geq a_n$ כנדרש.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $\lim_{n\to\infty}a_n$.

פתרון:

אם הסדרה חסומה אז יש לה גבול סופי שנסמנו L. כלומר $a_n\to L$ ולכן גם $a_{n+1}\to L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L\leftarrow a_{n+1}=a_n^2-3a_n+4\to L^2-3L+4$$

כלומר $L=L^2-3L+4$. נעביר אגף לקבל

$$0=L^2-4L+4=\left(L-2\right)^2$$

ולכן $L=2$.

נוכיח כעת שהסדרה חסומה ע"י 2 ולכן $L=2$ אכן גבולה. טענה: לכל n טבעי מתקיים $1\leq a_n\leq 2$ (חסם מלרע 1 שבטענה יתבהר עוד מעט).

הוכחה: באינדוקציה:

- בסיס $n=1$: לפי הגדרה $1 \le a_1 = \frac{3}{2} \le 2$
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $1 \le a_n \le 2$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $1 \le a_{n+1} \le 2$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4$$

ולכן צריך להוכיח כי $1 \le a_n^2 - 3a_n + 4 \le 2$ או באופן שקול ש $a_n^2 - 3a_n + 2 \le 0$ וגם $0 \le a_n^2 - 3a_n + 3$.

– נסתכל על הפרבולה $p(x) = x^2 - 3x + 2$ ונראה שעבור $1 \le x \le 2$ מתקיים $p(x) \le 0$ ולכן גם $p(a_n) \le 0$. אכן

$$p(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

ולכן חיתוך עם ציר x קורה ב 1 וב 2. בנוסף, לכל $1 \le x \le 2$ מתקיים כי $p(x) \le 0$ (ע"י הצבה של ערך שרירותי שמה, למשל $x = 1.5$).

– נסתכל על הפרבולה $p(x) = x^2 - 3x + 3$ ונראה שעבור $1 \le x \le 2$ מתקיים $p(x) \ge 0$ ולכן גם $p(a_n) \ge 0$. אכן ל

$$p(x) = x^2 - 3x + 3$$

ומכיוון ש $\sqrt{9 - 4 \cdot 3}$ לא ממשי נקבל של $p(x)$ אין חיתוך עם ציר x. כיוון ש $p(0) = 3 \ge 0$ הפרבולה מרחפת ולכל x מתקיים $p(x) \ge 0$

.4

(א) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)$ מונוטונית עולה.
פתרון: נגזור את $f(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)$ לפי נגזרת מכפלה ונקבל

$$f'(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + (2x-2)\,e^x = e^x \cdot x^2 \ge 0$$

ומתאפס רק ב $f'(0) = 0$. לכן f עולה ממש בכל $\mathbb{R}$.

(ב) הוכיחו שלכל $a > 0$ למשוואה $e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) = a$ יש פתרון יחיד.
פתרון: יהא $a > 0$ ונגדיר פונקציה $g(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) - a = f(x) - a$ ונראה שיש לה שורש יחיד (או חיתוך יחיד עם ציר x). כיוון ש $g'(x) = f'(x)$ נקבל ש g עולה ממש בכל $\mathbb{R}$ ולכן יש לה לכל היותר נקודת חיתוך אחת עם ציר x. כעת

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2 - 2x + 2\right)}{e^{-x}} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-2)}{-e^{-x}} \underbrace{=}_{\frac{-\infty}{-\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

ולכן

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - a = 0 - a = -a$$

ומכיוון ש $a > 0$ נקבל ש $\lim_{x\to-\infty} g(x) < 0$ ולכן קיימת נקודה c בה $g(x) < 0$. מצד שני

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) - a = \{\infty \cdot \infty - a\} = \infty$$

ולכן קיימת נקודה d כך ש $f(d) > 0$ ולכן בקטע $[c,d]$ הפונקציה g מחליפה סימן והיא רציפה שמה ולכן לפי משפט ערך הביניים היא חותכת את ציר x בנקודה בקטע זה. לסיכום: ל g יש חיתוך עם ציר x ומכיוון שיש לכל היותר חיתוך אחד נקבל שיש בדיוק חיתוך אחד.

5. תהיא פונקציה f המקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ וגם $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

(א) הוכיחו/הפריכו: לפונקציה f יש נקודת מינימום.
פתרון: הפרכה: נסתכל על $f(x)=e^x$ היא מקיימת כי את נתוני השאלה אך אין לה נקודת מינימום שהרי היא עולה ממש בכל $\mathbb{R}$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: הפונקציה f חסומה מלמטה.
פתרון: הפרכה: נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & 0<x\leq 1\\ 0 & x\leq 0\\ x & x>1\end{cases}$$

אזי קל לראות שנתוני השאלה מתקיימים אבל היא לא חסומה מלמטה כי $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} -\frac{1}{x}=-\infty$.

(ג) נתון בנוסף כי f רציפה בכל $\mathbb{R}$, הוכיחו כי היא חסומה מלמטה.
פתרון: הוכחה: כיוון ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ קיים M שהחל ממנו $f(x)>1$. (כלומר, לכל $x>M$ מתקיים $f(x)>1$).
כיוון ש $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ קיים K שלכל $x<K$ מתקיים $-1<f(x)$. בקטע $[K,M]$ הפונקציה f רציפה ולכן לפי משפט ויירשטראס היא מקבלת שמה מינימים שנסמנו m. לכן לכל x ממשי מתקיים כי

$$\min\{m,-1,1\}\leq f(x)$$

ובפרט $\min\{m,-1,1\}$ חוסם את f מלמטה בכל $\mathbb{R}$.