מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 4

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. לכל אחד מהיחסים R הבאים, קבעו (לכל תכונה בנפרד) האם רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי. אם זה יחס שקילות, ציינו מה הן מחלקות השקילות.

א) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $\left(a\equiv b\left(\bmod 2\right)\right)\vee\left(a\equiv b\left(\bmod 3\right)\right)$.

רפלקסיבי וסימטרי אך אינו טרנזיטיבי (למשל $1\equiv 3(\bmod 2)\wedge 3\equiv 6(\bmod 3)$ אבל 1 אינו מתייחס ל- 6).

ב) $\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)\in R\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ אם $x_1=x_2$.

זהו יחס שקילות. מחלקת השקילות של $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ היא הישר $x=x_0$, כלומר: $\left[(x_0,y_0)\right]_R=\left\{(x,y)\mid(x=x_0)\wedge(y\in\mathbb{R})\right\}$

ג) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם a מחלק את b.

אינו רפלקסיבי (0 לא מחלק אף מספר), כן טרנזיטיבי, ואינו סימטרי.

ד) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a+b$ זוגי.

זהו יחס שקילות עם שתי מחלקות שקילות (זוגיים ואי-זוגיים).

ה) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a+b$ אי-זוגי.

אינו רפלקסיבי ואינו טרנזיטיבי, כן סימטרי.

ו) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a\le b$.

סדר ליניארי (רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי).

ז) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a^2=b^2$.

יחס שקילות המזהה כל איבר עם הנגדי שלו $\mathbb{Z}/R=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

ח) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a<b$.

אינו רפלקסיבי ואינו סימטרי, כן טרנזיטיבי.

2. הוכיחו: חיתוך של משפחה לא ריקה של יחסי שקילות $\{R_i\}_{i\in I}$ על אותה קבוצה A, הוא יחס שקילות על A.

כל תכונות יחס שקילות נשמרות תחת חיתוך.

למשל עבור סימטריות: צריך להוכיח שאם $(x,y)\in\bigcap_{i\in I}R_i$ אז $(y,x)\in\bigcap_{i\in I}R_i$.

אבל אם $(x,y)\in\bigcap_{i\in I}R_i$ אז $\forall i\in I\left((x,y)\in R_i\right)$ והם כולם יחסי שקילות, לכן: $\forall i\in I\left((y,x)\in R_i\right)$ ולכן $(y,x)\in\bigcap_{i\in I}R_i$, כדרוש.

3. כמה יחסי שקילות אפשר להגדיר על הקבוצה $A=\{1,2,3\}$?

כמספר החלוקות שלה: 5.

4. A קבוצה בעלת מספר סופי של איברים, ו- $R\subseteq A\times A$ יחס שקילות על A.
הוכיחו: $|A|$ אי-זוגי אם ורק אם $|R|$ אי-זוגי.

נגדיר יחס שקילות על קבוצת היחס R על ידי $(a,b)\sim(c,d)$ אמ"ם $a=d\wedge b=c$.
מחלקות השקילות של יחס זה הן בגודל 2 (אם $a\neq b$) או 1 (אם $a=b$). מכיוון שיחס שקילות הוא רפלקסיבי, יש בדיוק $|A|$ מחלקות בגודל 1. נסמן ב- k את מספר מחלקות השקילות הנותרת (כולן בגודל 2).
בגלל שקבוצת המנה היא חלוקה של R קיבלנו ש- $|R|=2\cdot k+|A|$, ולכן הזוגיות של $|R|$ נקבעת על פי $|A|$ בלבד.

5. **שאלת בונוס**: קראו את העמודים המצורפים מהספר "מבוא לתורת הקבוצות" של שמרון אברהם וענו על השאלות הבאות:

א) הוכיחו וספקו דוגמה של הכלה ממש $\overline{\lim}(X_n\setminus Y_n)\subseteq\overline{\lim}X_n\setminus\underline{\lim}Y_n$

הוכחה:

$$\overline{\lim}(X_n\setminus Y_n)\overset{\text{definition}}{=}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n}(X_m\setminus Y_m)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n}(X_m\setminus Y_m)\overset{X\setminus Y=X\cap Y^c}{=}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n}\left(X_m\cap(Y_m)^c\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n}\left(X_m\cap(Y_m)^c\right)\overset{\bigcup(X_m\cap Y_m)\subseteq\bigcup X_m\cap\bigcup Y_m}{\subseteq}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\left(\bigcup_{m\geq n}X_m\right)\cap\left(\bigcup_{m\geq n}(Y_m)^c\right)\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\left(\bigcup_{m\geq n}X_m\right)\cap\left(\bigcup_{m\geq n}(Y_m)^c\right)\right)\overset{\text{order of intersection}}{=}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m\geq n}X_m\right)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m\geq n}(Y_m)^c\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m\geq n}X_m\right)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m\geq n}(Y_m)^c\right)\overset{\text{definition}}{=}\overline{\lim}X_n\cap\overline{\lim}\left((Y_n)^c\right)$$

$$\overline{\lim}X_n\cap\overline{\lim}\left((Y_n)^c\right)\overset{\text{see 1.18 in scanned pages}}{=}\overline{\lim}X_n\cap\left(\underline{\lim}(Y_n)\right)^c$$

$$\overline{\lim}X_n\cap\left(\underline{\lim}(Y_n)\right)^c\overset{X\setminus Y=X\cap Y^c}{=}\overline{\lim}X_n\setminus\underline{\lim}Y_n$$

כאשר $X_n=Y_n=A_n$ הסדרה A_n מסעיף ב' היא דוגמה להכלה ממש.

ב) מצאו $\overline{\lim}A_n$ ו- $\underline{\lim}A_n$ עבור הסדרה

$$A_n=\begin{cases}\left(0,1-\dfrac{1}{n}\right), & 2\mid n\\ \left[\dfrac{1}{n},n\right), & 2\nmid n\end{cases}$$

$$\overline{\lim}A_n=(0,\infty)$$
$$\underline{\lim}A_n=(0,1)$$

(5.) (א.) $X\times(Y\cup Z) = (X\times Y)\cup(X\times Z)$.

(ב.) $X\times(Y\cap Z) = (X\times Y)\cap(X\times Z)$.

(ג.) $X\times(Y-Z) = (X\times Y)-(X\times Z)$.

*סדרות של קבוצות

1.14 <u>הגדרה</u>: בהנתן סדרת הקבוצות $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, <u>הגביל העליון</u> של הסדרה הנה קבוצת כל האיברים x השייכים ל- X עבור אינסוף מהאינדכסים n. הגבול העליון של $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מסומן ב- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$. <u>הגבול התחתון</u> של הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ הנה קבוצת כל האיברים x השייכים לכל הקבוצות X_n פרט אולי למספר סופי מהן. הגבול התחתון של $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מסומן ב- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$.

<u>הערה</u>: מן ההגדרה ברור ש-:

(1.) $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ אם ורק אם לכל $n\in N$ קיים $m\in N$ כך ש-$m>n$ ו-$x\in X_m$.

(2.) $x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ אם ורק אם קיים $n_0\in N$ כך ש-$x\in X_n$ לכל $n\geq n_0$.

(3.) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$

בטענה הבאה ניתן הצגה מפורשת של $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ ו- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$.

1.15 <u>טענה</u>: תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות. אזי מתקיים:

(1.) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{m\geq n} X_m \right)$.

(2.) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap\limits_{m\geq n} X_m \right)$.

<u>הוכחה</u>: (.1) $x \in \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ אם ורק אם לכל $n\in N$ קיים $m\in N$ כך ש-$m > n$ ו-$x \in X_m$ אם ורק אם לכל $n\in N$ $x \in \bigcup_{m\geq n} X_m$ אם ורק אם $x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{m\geq n} X_m)$.

(.2) $x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ אם ורק אם קיים $n_0\in N$ כך ש-$x \in X_n$ לכל $n\geq n_0$ אם ורק אם קיים $n_0 \in N$ כך ש-$x \in \bigcap_{m\geq n_0} X_m$ אם ורק אם $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{m\geq n} X_m)$.

□

<u>דוגמאות</u>: (.1) אם $X_n = [0,\frac{n}{n+1}]$ $n = 1,2,\ldots$ אזי $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = [0,1)$

(.2) אם $X_n = \begin{cases} [0,1] & \text{אי-זוגי } n \\ [-1,0] & \text{זוגי } n \end{cases}$ אזי $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = [-1,1]$ ו-$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \{0\}$

<u>1.16 הגדרה</u>: (.1) אם בהנתן הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ אזי נאמר שהסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>מתכנסת</u> ונכתוב $\lim_{n\to\infty} X_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ ונקרא לקבוצה $\lim_{n\to\infty} X_n$ <u>הגבול</u> של הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(.2) סדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $X_n \subset X_{n+1}$ לכל $n\in N$ נקראת סדרה <u>עולה</u> וכאשר $X_n \supset X_{n+1}$ לכל $n\in N$ הסדרה נקראת <u>יורדת</u>. סדרה שהיא או עולה או יורדת נקראת סדרה <u>מונוטונית</u>.

<u>1.17 טענה</u>: סדרה מונוטונית $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות מתכנסת. אם הסדרה עולה אזי $\lim_{n\to\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ואם הסדרה היא יורדת אזי $\lim_{n\to\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$.

<u>הוכחה</u>: תרגיל.

הקשר בין הפעולה של משלים מחד לבין הפעולות של גבול עליון וגבול תחתון מאידך, מבוטא בטענה הבאה.

1.18 טענה: תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות חלקיות של הקבוצה X ותהי Y קבוצה חלקית של X. אזי:

(.1) $Y - \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty}(Y-X_n)$.

(.2) $Y - \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \underline{\lim}_{n\to\infty}(Y-X_n)$.

בפרט מתקיים: $(\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n)' = \underline{\lim}_{n\to\infty} X'_n$ ו-$(\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n)' = \overline{\lim}_{n\to\infty} X'_n$.

הוכחה: (.1) $Y - \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = Y - \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{m\geq n} X_m) = Y\cap(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{m\geq n} X_m)')$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}(Y\cap(\bigcup_{m\geq n} X'_m)) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{m\geq n}(Y-X_m)) = \overline{\lim}_{n\to\infty}(Y-X_n)$$

(.2) תרגיל.

□