© כל הזכויות שמורות לדביר חדד ©

פונקציות מרוכבות 1

שם המרצה: שחר נבו. יושב ב111/216, טלפון 035318769, מייל nevosh@mail.biu.ac.il

ספרות: האוניברסיטה הפתוחה, בן ציון קון, Boas , Ahlfors.

תרגילי בית מהווים 15%, ובוחן מהווה 10%. נותרו עוד 75% בחינה.

<u>שיעור 1 (24.2.2014) – מספרים מרוכבים</u>

המספרים התפתחו באופן הדרגתי, כאשר בשלב הראשון וההתחלתי המציא (או גילה) האדם הקדמון את המספרים הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3\ldots\}$, לאחר מכן הוא גילה שכשחסרים לו כמה תרנגולות הוא צריך גם מספרים שליליים – וכך הומצאו המספרים השלמים $\mathbb{Z}=\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. כשרצה לחלק סוכריות לילדים, והמספרים לא חולקו באופן מלא, הוא גילה את המספרים הרציונאליים $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\}$. בעקבות כך שציר המספרים הוא צפוף (או האגדה על פיתגורס והמשולש שווה שוקיים עם שוקיים בגודל 1 ו1), גילו את $\sqrt{2}$, ומתוך כך את המספרים הממשיים $\mathbb{R}$. בשלב מאוחר מאוד, הגדירו פתרון למשוואה הבאה: $x^2+1=0$, ולמרות שזה לא נראה הגיוני (מאחר והגדרנו העלאת מספר בריבוע למשהו שהוא לכל הפחות אפס), הגדרנו את המספר $x=i$. ומכאן, התפתח לנו שדה המרוכבים $\mathbb{C}=\{a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}$.

את הפעולות הסטנדרטיות פיתחו כדלהלן:

1. חיבור: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
2. כפל: $(a+bi)\cdot(c+di)=\mathrm{ac}+\mathrm{adi}+\mathrm{bci}-\mathrm{bd}=(\mathrm{ac}-\mathrm{bd})+(\mathrm{ad}+\mathrm{bc})\mathrm{i}$

קל לראות ש$\mathbb{C}$ עם $(+,\times)$ חבורה חילופית ב+, וגם חבורה חילופית ב×. חבורה חילופית דיסטרבוטיבית היא שדה, ומאחר שמתקיים הפילוג $(z_1\times(z_2+z_3)=z_1\times z_2+z_1\times z_3)$ קיבלנו ש$\mathbb{C}$ שדה. נמצא איברים נגדיים:

א. איבר נגדי ב+: עבור $a+bi$ האיבר הנגדי הוא $-a+(-b)i$

ב. קיום איבר נגדי (כלומר הופכי) בכפל: נתון $z=a+bi$ כך ש$a^2+b^2>0$, $(a,b)\neq(0,0)$. כעת נמצא לו הופכי. ראשית יש לשאול, מהו איבר היחידה? בהכרח ש1, כי המרוכבים הם הרחבה של הממשיים. נבדוק כי מתקיים $(a+bi)\times(1+oi)=a+0+bi+0=a+bi$, והוכחנו שהוא איבר יחידה. עכשיו נחפש $(a+bi)\times(x+iy)=1+0i$ וע״י פיתוח ע״פ כפל נקבל $(ax-yb)+(bx+ay)i=1+0i$. נשווה את הערך הממשי עם הממשי, והמדומה עם המדומה, ונקבל מערכת משוואות $\begin{Bmatrix}ax-yb=1\\ bx+ay=0\end{Bmatrix}$, ואנו יודעים בוודאות שיש למערכת משוואות הזו פתרון כי הדטרמיננטה של $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ היא a^2+b^2 , וזה בהכרח חיובי! ע״פ מה שלמדנו בלינארית, הפתרון הוא $y=-\frac{b}{a^2+b^2}$, $x=\frac{a}{a^2+b^2}$. קיבלנו אחרי כל זה ביטוי לאיבר ההופכי: $(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$.
כעת נבדוק זאת ע״י הכפלתם: $(a+bi)\times\frac{a-bi}{a^2+b^2}\underbrace{=}_{\text{כי זה שדה}}\frac{a^2-i^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$, ומ.ש.ל.

הטופולוגיה: הטופולוגיה ב$\mathbb{C}$ זהה לזו של $\mathbb{R}^2$ האוקלידי. כלומר, A היא קבוצה סגורה אם לכל $z_0=x_0+iy_0\in A$ קיים $r>0$ כך ש$\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}\subset A$, זהו עיגול שמרכזו בz_0 ורדיוסו r. מכאן והלאה, נסמן תמיד $z_0=x_o+iy_0$.

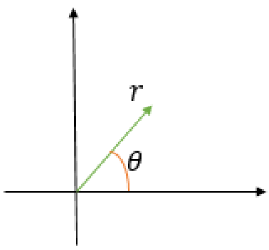
ערך מוחלט: מרחק, נתון ע״י $|z_0|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$. ולפי זה, הביטוי $|z_1-z_2|$ מסמל את המרחק בין z_1 וz_2. לפי זה , נגדיר $B(z_0,r)=\{z:|z-z_0|<r\}$, $\bar{B}(z_0,r)=\{z:|z-z_0|\leq r\}$, $B'(z_0,r)=\{z:0<|z-z_0|<r\}$. ייתכן ונסמן $\Delta(z_o\,,r)$ במקום $B(z_0,r)$ וכדומה. ΔU מסמן את עיגול היחידה , כלומר $\Delta U=\Delta(0,1)$.

© כל הזכויות שמורות לדביר חדד ©

הצמוד: מוגדר להיות $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$. כמו כן, מתקיים $\bar{z}_0 \cdot z_0 = x_0^2 + y_0^2 = |z_0|^2$. מכאן, ש$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
כלומר, מצאנו את ההופכי של z. אפשר להבין זאת כמראה של כל מספר כאשר המראה היא ציר x. גם כן קל לראות (ומומלץ להראות בבית!) ש$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, ו$(\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$.

<u>טענה:</u> $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

הוכחה: $|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$ ועל״י הוצאת שורש קיבלנו את הרצוי.
מ.ש.ל.



הצגה פולרית (קוטבית): נחפש הגדרה גיאומטריה שתהיה קונסיסטנטית עם הכפל גם כן, החיבור הוא פשוט לפי כלל המקבילית. נגדיר את המעבר כך: $(x, y) => (r, \theta)$ כאשר r זה המרחק מ(0,0) וθ זווית מציר x החיובי נגד כיוון השעון. נקבל ע״פ הגדרה זו כי $x = rcos(\theta), y = rsin(\theta)$ (וכמובן שניתן לבחור $\theta = \theta + 2\pi k$..) כעת נגדיר את הכפל כך: $z_1 \cdot z_2 = (r_1, \theta_1) \cdot (r_2, \theta_2) = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$, וזה יעבוד לנו, כמו שניתן לראות אם נביט במרוכבים כמוצג משמאל.

בעצם, המכפלה מובעת ע״י הביטוי $r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + i r_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$. נבדוק זאת: $\left(r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \cdot r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))\right) =$
$r_1 r_2[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + i(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))] =$
$r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$ כצפוי! (נגדיר $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = cis(\theta)$)

את האיבר ההופכי ניתן למצוא בעזרת הביטוי הפולרי כך:

עבור $z = rcos(\theta) + irsin(\theta)$ נמצא $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = \frac{1}{r^2} \cdot rcis(\theta)$
וקיבלנו את הביטוי שעבדנו עליו עם ההצגה השנייה.

נוכיח בהמשך הקורס את הסימון הבא: $rcis(\theta) = re^{i\theta}$, והוא נוח מאוד לחישובים שלנו. זו היא הקדמה לנוסחת מואבר.

נוסחת דה מואבר: $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ עבור n שלם. אפשר לדלות מהנוסחה הזו המון זהויות טריגונומטריות.

נביט בn=2: $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2\theta + 2i\sin(\theta)\cos(\theta)$, וע״י השוואה בין החלקים (המדומה למדומה והממשי לממשי) נקבל $\cos^2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ וגם לגבי $\sin^2\theta$.

- הערה: e^{iA} הם מספרים על מעגל היחידה.

פתרון משוואה מסוג $z^n = z_0$: נוח מאוד לפתור משוואות מסוג זה בצורה פולרית. נגדיר את $z_0 = r_0 e^{iA_0}$, ואם מתקיים ש$r_0 = 0$ אז הפתרון היחיד הוא $z = 0$. אחרת, נגדיר $z = re^{iA}$, ולכן $(re^{iA})^n = r_0 e^{iA_0}$, ועל כן $r^n e^{iAn} = r_0 e^{iA}$. כעת, מתקיים בהכרח ש$r = \sqrt[n]{r_0}$, ו$nA = A_0 + 2\pi k$.

נקבל את הזהות $A = \frac{A_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k$, וk יכול להיות כרצוננו. לכל משוואה ממעלה n נקבל n פתרונות. הפתרונות ימצאו על אותו המעגל תמיד, כי הרדיוס של כולם זהה.

דוגמה: עבור n=3, נפתור את המשוואה $z^3 = 8e^{\frac{i\pi}{2}}$. ע״פ הנוסחה שלמדנו זה עתה, נקבל $k = 0,1,2$, $z_{k+1} = 2e^{\frac{i\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}}$ ולכן $z_3 = 2e^{\frac{9}{6}\pi i}, z_2 = 2e^{\frac{5\pi i}{6}}, z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$. ניתן לפתור לפעמים בצורה קרטזית. נביט בדוגמה נוספת:

דוגמה: $z^3 = 1$ (כאן כל הפתרונות יהיו על מעגל היחידה). ברור ש$z_1 = 1$. את שתי הפתרונות האחרים נמצא באמצעות ההצגה הקרטזית. נציב $z = x + iy$ ונקבל $(x + iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy - 3xy^2 - iy^3 = 1$. אלו הם שתי משוואות

© כל הזכויות שמורות לדביר חדד ©

בשני נעלמים $3x^2y = y^3$, $x^3 - 3xy^2 = 1$. פתרון ראשון הוא y=0, ואז x=1. אופציה נוספת היא כעת לחלק בy, כי $y \neq 0$, ולקבל $3x^2 = y^2$ ולהציב במשוואה השנייה $x^3 - 9x^3 = 1$ ולכן $x^3 = -\frac{1}{8}$ ומכאן ש$x = -\frac{1}{2}$. כעת, נמצא את y: $y^2 = \frac{3}{4}$ ומזה יוצא ש$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. קיבלנו שלושה פתרונות , כדלקמן: $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.
מ.ש.ל.

כמה הערות:

- עבור $z = a + bi$ נגדיר $Re(z) = a, Im(z) = b$ וכמובן ש$|a|, |b| \leq |z|$
- אי שוויון המשולש: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

כעת, נתחיל לגלוש לכיוון של אנליזה: נניח $\{z_n\}$ סדרת מספרים מרוכבים מסוג $z_n = x_n + iy_n$ נאמר ש$z_n \to z_0$ אם ורק אם $|z_n - z_0| \to 0$ עבור $n \to \infty$ כמובן. זה קורה אמ"מ $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. באופן דומה עבור הפולרי מתקיים כי $r_n \to r_0, \theta_n \to \theta_0$.

פונקציות: כאן מתחיל הקסם של המרוכבים. במקרה הממשי, מדובר בפונקציה במישור x,y בלי שום בעיה. הכל אפשר לראות בעיניים. בגלל שמבחינה טופולוגית פונקציה מרוכבת היא כמו העתקה מ$\mathbb{R}^2$ ל$\mathbb{R}^2$, ואת זה אין אנו יכולים לדמות על מערכת צירים. זה מאוד מקשה על המחקר מהבחינה הזו שלא ניתן לראות את הכל בעיניים, ומקבלים משפטים מפתיעים, למשל: אם פונקציה מרוכבת חסומה במישור וגזירה, אז הפונקציה הזו חייבת להיות קבועה.

<u>הגדרה</u>: פונקציה מרוכבת היא $\varphi(z)$ המוגדרת בקבוצה במישור המרוכב וערכיה גם כן במישור המרוכב.

למשל $f(z) = z\ , z^2, 3z^6 - 2z, \frac{z^2-1}{z^3+5z+2}$.

בד"כ, f תהיה מוגדרת בתחום ב$\mathbb{C}$ (תחום=קבוצה פתוחה וקשירה). קיים $L = \lim_{z \to z_0}\left(f(z)\right)$ אם $|f(z) - L|_{z \to z_0} \to 0$. כלומר, אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $0 < |z - z_0| < \delta$ אזי $|f(z) - L| < \varepsilon$. אם קיים גבול $L = f(z_0)$ נאמר אז ש$f(z)$ רציפה בz_0. f רציפה בD אם f רציפה בכל נקודה בD.