

תרגיל בית 10 – טופולוגיה

שאלה 1

(א) יהיו X_1, X_2 מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש- $X_1 \times X_2 \cong X_2 \times X_1$.

(ב) יהי (X, τ_{cof}) מ"ט אינסופי עם הטופולוגיה הקוסופית. נסמן ב- τ את טופולוגיית המכפלה על $X \times X$. האם τ היא הטופולוגיה הקוסופית על $X \times X$? הוכיחו או הפריכו!

שאלה 2

יהי (X, τ) מרחב טופולוגי עם התכונה הבאה: לכל נקודה קיימת סביבה קשירה מסילתית. הוכיחו: כל מרכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה. הראו שמרכיבי הקשירות המסילתית מתלכדים עם מרכיבי הקשירות ולכן גם סגורים.

שאלה 3

יהיו (X_i, τ_i) מרחבים טופולוגיים דיסקרטיים לכל $i \in I$. האם מרחב המכפלה $\prod_{i \in I} X_i$ דיסקרטי?
רמז: תלוי.

שאלה 4

יהי (X, d) מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

שאלה 5

יהי X מרחב טופולוגי ותהי I קבוצת אינדקסים. נסמן ב- X^I את מרחב המכפלה $\prod_{i \in I} X$. לכל $x \in X$ נגדיר $f_x \in X^I$ להיות הווקטור האינסופי שכל רכיביו הם x . נסמן $Y = \{f_x \mid x \in X\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ- X^I . הוכיחו כי X הומיאומורפי ל- Y .

שאלה 6

הוכיחו שמכפלת מרחבי T_1 היא מרחב T_1 .

בהצלחה!