20|11|ה

בחזרה להסתברות מותנית

בהינתן מאורע A קבוע כך ש $P(A)>0$ אז הפונקציה $Q(B)=P(B|A)$, היא מידת הסתברות. מכך נובע שכל המשפטים לגבי מידות הסתברות תקפים גם לגבי Q.

למשל נוסחת ההסתברות השלמה:

$$Q(B)=Q(B|C)\cdot Q(C)+Q(B|C^c)\cdot Q(C^c)$$

תשומת לבכם: התניה קודם ב-A ואח"כ ב-C:

$$Q(B|C)=\frac{Q(B\cap C)}{Q(C)}=\frac{P(B\cap C|A)}{P(C|A)}=\frac{P(B\cap C\cap A)/\cancel{P(A)}}{P(C\cap A)/\cancel{P(A)}}=\frac{P(B\cap \boxed{C\cap A})}{P(\boxed{C\cap A})}\Rightarrow P(B|C\cap A)$$

משתנה מקרי:

שונות:

הגדרת השונות של משתנה מקרי X: (ממוצעים קבוע) $V[X]=E[(X-E[X])^2]$ מחשבים קודם

משפט:

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$$

הוכחה:

$$V[X]=E[(X-E[X])^2]=E[X^2-2XE[X]+(E[X])^2]=$$
$$=E[X^2]-2E[X\underbrace{E[X]}_{\text{קבוע}}]+E[(E[X])^2]=E[X^2]-2E[X]\cdot E[X]+(E[X])^2=E[X^2]-(E[X])^2$$

התוחלת של קבוע, היא הקבוע $E[a]=a$.

משפט:

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$ עבור a,b קבועים ממשיים.

הוכחה: תזכורת: $\boxed{E[g(X)]=\sum_{k\in X(\Omega)}g(k)P_X(k)}$. נגדיר $g(x)=ax+b$

$$E[aX+b]=E[g(X)]=\sum_k g(k)P_X(k)=\sum(ak+b)\cdot P_X(k)=$$
$$a\underbrace{\sum k\cdot P_X(k)}_{\text{תוחלת לפי הגדרה.}}+b\underbrace{\sum P_X(k)}_{P(\Omega)}=aE[X]+b\cdot 1=aE[X]+b$$

משפט:

אם $X_1,X_2,\dots,X_n$ מ"מ כלשהם אז $E[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]$. (הם יכולים להיות תלויים)

← ההוכחה דומה לנ"ל.

משפט:

עבור a,b קבועים, X מ"מ, $E[\underset{\text{יוצא מחוץ קבוע}}{aX}+\underset{\text{נעלם}}{b}]=a^2V[X]$

הוכחה:

$$V[aX+b]=E[(aX+b-E[aX-b])^2]\overset{\text{תוחלת לינארית}}{=}E[(aX+\cancel{b}-aE[X]-\cancel{b})^2]=$$
$$=E[(aX-aE[X])^2]=E[a^2(X-E[X])^2]=a^2E[(X-E[X])^2]=a^2V[X]$$

הגדרה: $\sqrt{V[X]}(=SD(X))$ היא סטיית התקן של X.

התפלגויות מיוחדות

התפלגות אחידה:

סימון: $X\sim U(\{1,2,\dots,k\})$.

X מ"מ המקבל רק את הערכים 1-k בהסתברות שווה.

למשל X מופע בהטלת קוביה. למעשה X מופיע בכל מרחב מדגם סימטרי.

#תכונות של X:

1) $P_X(l)=\frac{1}{k}\ ;\ l=1,2,\dots,k$

2) $E[X]=\sum_{l=1}^{k} l\cdot\frac{1}{k}=\frac{k+1}{2}$

3) $V[X]=E[X^2]-(E[X])^2 \ \Big|\ E[X^2]=\sum_{l=1}^{k} l^2\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\left(\text{סכום ריבועים מ-1 עד k}\right)=$

$=\frac{1}{k}\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}\ \Big|\ V[X]=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}-\left(\frac{k+1}{2}\right)^2=$

$=\frac{2k^2+3k+1}{6}-\frac{k^2+2k+1}{4}=\frac{4k^2+6k+2-3k^2-6k-3}{12}=\frac{k^2-1}{12}=\frac{(k-1)(k+1)}{12}$

התפלגות ברנולי:

סימון: $X\sim Ber(p)$

X מ"מ המקבל רק: 1 בהסתברות p, 0 בהסתברות 1-p.

X מופיע בכל מקום שבו יש רק שתי אפשרויות לתוצאה של ניסוי: חולה/לא חולה, הצלחה/כשלון, עץ/פלי.

דוגמה: בהינתן מאורע A, האינדיקטור של A: מ"מ I_A המקבל 1 כאשר A קרה ו-0 כאשר A לא קרה, הוא מ"מ ברנולי. $I_A\sim Ber(P(A))$

#תכונות:

1) $P_X(k)=\begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \\ 0 & \text{אחר } k \end{cases}$

2) $E[X]=\sum k\cdot P_X(k)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$.

※ הערה: $E[I_A]=P(A)$.

3) $E[X^2]=1^2\cdot p+0^2(1-p)=p$.

※ הערה: $X=0,1 \Leftarrow X^2=0,1 \Leftarrow$ לכן $X^2=X$.

$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=p-p^2=p\underbrace{(1-p)}_{q}=pq$

(סימון מקובל)

Scanned by CamScanner

20/11/17

- המשך -

התפלגות בינומית:

סימון: $X \sim Bin(n,p)$: p - הסתברות להצלחה, n - מס' הניסויים.

X מייצג את מס' ההצלחות ב-n חזרות של אותו [ניסוי שיש לו סיכוי p להצלחה, וסיכוי q-1 לכישלון.] ניסוי ברנולי.

החזרות בלתי תלויות זו בזו.

למשל: - מס' הפעמים ב-10 חזרות על הטלת מטבע הוגן.

- מס' החולים מתוך n נבדקים.

תכונות:

1) נשים לב שאם $X_1,...,X_n$ הם תוצאות הניסויים $X=\sum_{i=1}^n X_i$; $X_i \sim Ber(p)$ (1 אם הצלחה, 0 - אחרת)

כלומר, $X\sim Bin(n,p) \iff X$ סכום של n מ"מ ב"ת $Ber(p)$.

2) $P_X(k)=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$; $k=0,1,...,n$.

n-k כשלונות, k הצלחות, בחירת k הניסויים שבהם תהיה הצלחה.

$$\sum_{k=0}^n P_X(k)=\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{p^k}_{x} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{y} \Rightarrow$$

⊛ תזכורת: $\left[\sum\binom{n}{k}x^k y^{n-k}=(x+y)^n\right]$ (נוסחת הבינום)

$$=(p+(1-p))^n=1^n=1$$

3) $E[X]=E[\sum_{i=1}^n X_i] \overset{\text{תוחלת לינארית}}{=} \sum_{i=1}^n E[X_i]=\sum_{i=1}^n p = np$ $(X_i\sim Ber(p))$

מס' ההצלחות הממוצע הוא מכפלת מס' הניסויים בסיכוי ההצלחה בכל ניסוי.

4) $V[X]=V[\sum_{i=1}^n X_i] \overset{*}{=} \sum_{i=1}^n V(\overset{X_i\sim Ber(p)}{X_i}) = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p)=npq$

* המעבר הזה נכון כאשר $X_1,...,X_n$ מ"מ ב"ת. (נוכיח זאת בהמשך הקורס).

⇐ **חישוב נוסף** של השונות של $X\sim Bin(n,p)$:

$$E[X^2]=E[(\sum_{i=1}^n X_i)^2]=E[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n X_iX_j]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n E[X_iX_j]$$

← X_i, X_j הם $Ber(p)$ כאשר $i=j$: $X_iX_j=X_i^2=X_i \Rightarrow E[X_i]=p$

כאשר $i\neq j$; $y=X_i\cdot X_j$. נטען ש-y מקבל רק 0/1 בלבד.

$P(y=1)=?=P(X_i=1,X_j=1)=P(X_i=1)P(X_j=1)=p\cdot p=p^2$

הצלחה בניסוי i, הצלחה בניסוי j, ניסויים ב"ת.

מסקנה: $P(y=0)=1-p^2$, כלומר $y\sim Ber(p^2)$

← ההיגיון: y הוא האינדיקטור של הצלחה בו זמנית בשני הניסויים i ו-j.

#מסקנה 2: $E[y]=p^2$, נחזור ל- $E[x^2]$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_iX_j) = \sum_{i=1}^{n} E[\underbrace{X_iX_i}_{Ber(p)}] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} E[\underbrace{X_iX_j}_{Ber(p^2)}] = \sum_{i=1}^{n} p + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} p^2 =$$

$$= np + (n^2-n)p^2 = np + (np)^2 - np^2.$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = np + \cancel{(np)^2} - np^2 - \cancel{(np)^2} = np - np^2 = np(1-p)$$

חישבנו ב-③.

התפלגות פואסון:

סימון: $X \sim Poi(\lambda)$

X הוא מ"מ פואסון עם פרמטר λ אם מתקיים:

$$P_X(k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} \quad ; k=0,1,2\ldots$$

הערה: $\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = e^{-\lambda}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{טור טיילור של } e^x} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$

מ"מ פואסון הוא קירוב טוב לבינומי $Bin(n,p)$ כאשר n גדול מאוד ו- p קטן מאוד.

← הסבר: $P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{קשה לחישוב כש-n גדול (n מספר גדול מאוד)}} p^k(1-p)^{n-k}$. ולכן מחשבים במקום את $\underbrace{e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{קל לחישוב}}$.

דוגמאות:

מספר החיילים המתים מבעיטת סוס בחיל הפרשים הפרוסי בשנה.

הרבה חיילים בחיל הפרשים (n גדול) סיכוי נמוך למות מבעיטת סוס (p קטן).

בדוגמא זו סופרים את מס' ההצלחות בהרבה ניסויים עם סיכוי הצלחה קטן - $Bin(n,p)$ דומה ל- $Poi(\lambda)$ כאשר $\lambda = np$.

טעויות דפוס בספר (הרבה אותיות, סיכוי קטן לטעות)

מס' האנשים הנכנסים לסניף בנק בשעה.

משפט: אם נתון $X_n \sim Bin(n, \overset{p}{\frac{\lambda}{n}})$ אז כאשר $n\to\infty$: $P(X_n=k) \to P(X=k)$ כאשר $X \sim Poi(\underset{n\cdot p}{\lambda})$

← משמעות:

אם לוקחים מ"מ בינומיים אשר מס' הניסויים הולך וגדל וסיכוי ההצלחה הולך וקטן אבל הממוצע נשאר קבוע (λ) אז המ"מ הולך ונהיה דומה יותר למ"מ $Poi(\lambda)$. (הוכחה: חישוב תוחלת ושונות בשיעור הבא).

← בפרט להיות דומה לתוחלת והשונות של הבינומי המתאים.

20/11/17

המשך-

דוגמא:

מכונה מייצרת רכיבים כך שכל אחד מהם יכול להיות מקולקל בהסתברות 0.1 בת"ל באחרים.

מצאו את ההסתברות שבמדגם של 10 רכיבים יש לכל היותר רכיב אחד מקולקל.

⇐ נגדיר מ"מ X - מס' הרכיבים המקולקלים במדגם: $X \sim Bin(10, 0.1)$

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = \underbrace{\binom{10}{0}}_{0.1} p^0 \underbrace{(1-p)^{10}}_{0.9} + \underbrace{\binom{10}{1}}_{0.1} p \underbrace{(1-p)^9}_{0.9} = 0.7361$$

⇐ ננסה עם מ"מ פואסון במקום: $Y \sim Poi(\lambda)$. $np = \lambda \Rightarrow Y \sim Poi(1)$.

לפי המשפט Y דומה ל-X.

$$P(Y \le 1) = P(Y=0) + P(Y=1) = e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} + e^{-1} \cdot \frac{1^1}{1!} = 2e^{-1} = 0.7358$$