פתרון תרגיל בית 8 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ד טבת ה'תשע"ז, 22.1.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. נתונות התמורות הבאות בחבורה S_7: $\sigma=(13472)$, $\tau=(142)$, $a=(132)(5467)$.
חשבו את:

א. $a\sigma a^{-1}$.

ב. $a\tau a^{-1}$.

פתרון. לפי הנוסחה להצמדות ב-S_7,

$$\begin{aligned} a\sigma a^{-1} &= (a(1),a(3),a(4),a(7),a(2))=(3,2,6,5,1) \\ a\tau a^{-1} &= (a(1),a(4),a(2))=(3,6,1) \end{aligned}$$

שאלות להגשה

שאלה 2. נתבונן בחבורה $G=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הראו כי תת־החבורה $H=\left\langle\frac{2}{5}+\mathbb{Z},\frac{3}{14}+\mathbb{Z}\right\rangle$ (שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{2}{5}$ ו-$\frac{3}{14}$) היא ציקלית. מצאו את האינדקס $[G:H]$.

פתרון. א. איבר היחידה בחבורה G הוא המחלקה $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}+0$. לכן יש למצוא לכל $x\in G$ מספר טבעי $n\in\mathbb{N}$ כך שנקבל $n\cdot x+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-n.
כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x=\frac{a}{b}+\mathbb{Z}$ עבור $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}$. מכאן קל לראות כי $b\cdot\left(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right)=a+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. לכן x הוא לכל היותר מסדר (סופי) b. נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של x במקרה זה הוא בדיוק b. ברור שסדרת השברים $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתאימה לסדרה של איברים ב-G שסדרם עולה ממש.

ב. יש להוכיח שקיים $q \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיים $\left\langle \frac{2}{5}+\mathbb{Z}, \frac{3}{14}+\mathbb{Z} \right\rangle = \langle q+\mathbb{Z} \rangle$. נראה שאפשר לבחור את $q = \frac{1}{70}$. בשביל להראות הכלה דו־כיוונית, מספיק להראות הכלה של היוצרים. נשים לב כי $\frac{1}{70} = 7 \cdot \frac{2}{5} - 13 \cdot \frac{3}{14}$, ולכן $\left\langle \frac{1}{70}+\mathbb{Z} \right\rangle \subseteq \left\langle \frac{2}{5}+\mathbb{Z}, \frac{3}{14}+\mathbb{Z} \right\rangle$. מצד שני $\frac{2}{5} = 28 \cdot \frac{1}{70}$, $\frac{3}{14} = 15 \cdot \frac{1}{70}$, ולכן $\left\langle \frac{2}{5}+\mathbb{Z}, \frac{3}{14}+\mathbb{Z} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{70}+\mathbb{Z} \right\rangle$.
סדר תת־החבורה H הוא 70 ואילו G היא אינסופית, ולכן האינדקס שלה היא אינסופי לפי משפט לגראנז'. בנוגע לאינדקס, אפשר להראות גם שלכל שני מספרים ראשוניים $p_1 \neq p_2$ שונים שאינם מחלקים את 70 יתקיים כי $p_1 + H \neq p_2 + H$ ולכן ישנן אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

שאלה 3. תהי חבורה G. נגדיר את תת-חבורת הקומוטטורים שלה להיות

$$[G,G] = \left\langle \{aba^{-1}b^{-1} \,\middle|\, a,b \in G\} \right\rangle$$

הוכיחו:

א. הוכיחו שלכל אוטומורפיזם $\phi : G \to G$ מתקיים: $\phi([G,G]) \leq [G,G]$.

ב. הסיקו ש: $[G,G] \lhd G$ (רמז: התסכלו על ההעתקה מהצורה: $f_g(x) = gxg^{-1}$. לכל $g \in G$ זהו אוטומורפיזם של G).

ג. ${}^{G}\!/_{[G,G]}$ חבורה אבלית.

פתרון. א. נשים לב שתמונה של תת -חבורה תחת הומומורפים הינה תת חבורה של הטווח. לכן מספיק להוכיח הכלה.
נסמן: $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$ לכל $g,h \in G$.
פתרון ראשון:
נוכיח ראשית עבור היוצרים:
לכל אוטומורפיזם $\phi : G \to G$ ולכל $a,b \in G$:

$$\phi([a,b]) = \phi(aba^{-1}b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)(\phi(a))^{-1}(\phi(b))^{-1} = [\phi(a),\phi(b)] \in [G,G]$$

כעת, לפי טענה, כל איבר ב $[G,G]$ הוא כפולה של מספר סופי של חזקות שלמות של איברים בקבוצה $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G\}$, ולכן התמונה שלו תחת ϕ תהיה כפולה של מספר סופי של חזקות שלמות של איברים בקבוצה

$$\phi(\{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G\}) = \{\phi(a)\phi(b)(\phi(a))^{-1}(\phi(b))^{-1} \mid a,b \in G\} \subseteq \{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G\}$$

ולכן תהיה ב $[G,G]$.
פתרון שני:
תת-החבורה הנוצרת על ידי קבוצה של איברים היא תת-החבורה המינימלית שמכילה את קבוצת האיברים, לכן לכל אוטומורפיזם $\phi : G \to G$ מתקיים:

$$\phi(\{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G\}) \subseteq \phi([G,G])$$

$$\left\langle \phi(\{aba^{-1}b^{-1} \,\middle|\, a,b \in G\}) \right\rangle \subseteq \phi([G,G])$$

מכיוון ש ϕ אוטומורפיזם, כלומר, הפיך, אז לכל $a,b \in G$ מתקיים ש

$$\phi([\phi^{-1}(a),\phi^{-1}(b)]) = \phi(\phi^{-1}(a)\phi^{-1}(b)(\phi^{-1}(a))^{-1}(\phi^{-1}(b))^{-1}) = aba^{-1}b^{-1} = [a,b]$$

כלומר

$$\phi(\{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G\}) = \{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G\}$$

כלומר

$$\left\langle \phi(\{aba^{-1}b^{-1} \,|\, a,b\in G\})\right\rangle = \left\langle \{aba^{-1}b^{-1} \,|\, a,b\in G\}\right\rangle = [G,G]$$

ובסך הכל קיבלנו ש

$$[G,G]\subseteq \phi([G,G])$$

אבל זה כביכול ההיפך ממה שרצינו להוכיח!
ניזכר שהטענה הזו נכונה לכל אוטומורפיזם, בפרט גם ϕ^{-1} אוטומורפיזם, ולכן מקבלים

$$[G,G]\subseteq \phi^{-1}([G,G])$$

נפעיל ϕ על שני האגפים (שימו לב שזה ϕשל קבוצות, אבל אם יש הכלה לפני הפעלת ϕ, תהיה הכלה גם אחרי) ונקבל:

$$\phi([G,G])\subseteq \phi(\phi^{-1}([G,G])) = [G,G]$$

כפי שרצינו.

ב. מסעיף א, ומהרמז בסוגריים, נקבל שלכל $g\in G$:

$$g[G,G]g^{-1} = f_g([G,G])\subseteq [G,G]$$

וזה מוכיח נורמליות של $[G,G]$.

ג. יהיו $g,h\in G$. מתקיים:

$$gh = hg\cdot g^{-1}h^{-1}gh = hg\cdot [g^{-1},h^{-1}]$$

לכן מתקיים

$$g[G,G]\cdot h[G,G] = gh[G,G] = hg[G,G] = h[G,G]\cdot g[G,G]$$

בסך הכל, הוכחנו שכל שני איברים ב $G/[G,G]$ מתחלפים.

שאלה 4. נתונה התמורה $\pi = (1234)\,(567)\,(89)\in S_9$.
מצאו את מספר התמורות הצמודות לתמורה π.

פתרון.
אנו מחשבים למעשה את גודל מחלקת הצמידות של π.
כפי שלמדנו, האיברים במחלקת הצמידות של π הם התמורות עם אותו מבנה מחזורים.
יש לבחור 4 מספרים מתוך 9, עבור מחזור מאורך 4, וישנם $\binom{9}{4}\,(4-1)!$ מחזורים כאלו.
יש לבחור 3 מספרים מתוך 5 הנותרים, ולמספר המחזורים האלו הוא $\binom{5}{3}(3-1)!$ אפשרויות.
החילוף האחרון נקבע לחלוטין ע"י הבחירות הקודמות.
בסה"כ ישנן: $\binom{9}{4}\,(4-1)!\binom{5}{3}(3-1)! = 15120$ תמורות הצמודות ל π ב S_9.

שאלה 5. נתונה התמורה $(142)\in S_4$.

א. מצאו את מחלקת הצמידות שלה ב-S_4.

ב. מצאו תמורה σ הצמודה ל-(142) ב-S_4, אבל לא ב-A_4. הוכיחו את קביעתכם.

פתרון.

א. לפי טענה מהתרגול, שתי תמורות צמודות ב-S_n אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים. לכן, מחלקת הצמידות של תמורה מכילה את כל התמורות עם אותו מבנה מחזורים כמו של התמורה המקורית. מכאן שמחלקת הצמידות של התמורה הנתונה ב-S_4 היא

$$\{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,2),(1,3,4),(1,4,2),(1,4,3),(2,3,4),(2,4,3)\}$$

ב. ניקח את $\sigma=(1,2,4)$. σ צמודה ל-$(1,4,2)$ ב-S_4, כי יש להן אותו מבנה מחזורים. כעת, נניח בשלילה שהן צמודות ב-A_4. לכן קיימת תמורה $\sigma\in A_4$ שעבורה

$$(\sigma(1),\sigma(4),\sigma(2))=\sigma(1,4,2)\sigma^{-1}=(1,2,4)$$

מכאן בהכרח $\sigma(3)=3$. התמורות היחידות ב-A_4 המקיימות $\sigma(3)=3$ הן id, $(1,2,4)$ ו-$(1,4,2)$, ולכל σ מהרשימה הזו יתקיים

$$\sigma(1,4,2)\sigma^{-1}=(1,4,2)$$

בסתירה. לכן הן אינן צמודות ב-A_4.

שאלה 6. הוכיחו כי $S_n=\langle(12),(12\dots n)\rangle$ בצעדים הבאים: ראשית, היזכרו כי S_n נוצרת על ידי החילופים, כלומר

$$S_n=\langle\{(ij)|1\le i,j\le n,i\ne j\}\rangle$$

א. הראו כי כל חילוף מהצורה $(1k)$ אפשר להציג כמכפלת חילופים מהצורה $(m,m+1)$, והסיקו כי
$$S_n=\langle(12),(23),\dots,(n-1,n)\rangle$$

ב. הראו כי $S_n=\langle(12),(12\dots n)\rangle$ על ידי נוסחת ההצמדה ב-S_n.

הוכחה. ראשית, כפי שראינו בתרגול, S_n נוצרת על ידי החילופים, כלומר כל תמורה אפשר להציג כמכפלה של חילופים (לא בהכרח זרים!).

א. נרצה להראות כי כל חילוף (i,j) אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(1,k)$. לצורך כך, ניעזר בנוסחת ההצמדה. מתקיים

$$(i,j)=(1,i)(1,j)(1,i)$$

לכן
$$S_n=\langle(1,2),(1,3),\dots,(1,n)\rangle$$

נסביר זאת: כל תמורה אפשר להציג כמכפלה של חילופים, וכל חילוף אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(1,k)$. לכן אפשר לפרק כל תמורה למכפלה של חילופים מהצורה $(1,k)$.

ב. נרצה להראות שכל חילוף מהצורה $(1,k)$ אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(m,m+1)$. שוב, לפי נוסחת ההצמדה,

$$(1,k)=(1,2)\dots(k-2,k-1)(k-1,k)(k-2,k-1)\dots(1,2)$$

הסבר: בשלב הראשון,

$$(k-2,k-1)(k-1,k)(k-2,k-1)=(k-2,k)$$

אחר כך,

$$(k-3,k-2)(k-2,k-1)(k-1,k)(k-2,k-1)(k-3,k-2)=(k-3,k)$$

כך ממשיכים עד שמגיעים ל-$(1,k)$.
הראינו שכל תמורה ב-S_n אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(1,k)$, ושכל חילוף מהצורה $(1,k)$ אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(m,m+1)$. לכן, כל תמורה ב-S_n אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(m,m+1)$. מכאן

$$S_n=\langle(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)\rangle$$

ג. צריך להראות שכל תמורה מהצורה $(m,m+1)$ אפשר לכתוב כמכפלה של התמורות $(1,2)$ ו-$(1,2,\ldots,n)$. נשים לב כי לפי נוסחת ההצמדה ב-S_n

$$\begin{aligned}(1,2,\ldots,n)(1,2)(1,2,\ldots,n)^{-1} &= (2,3)\\(1,2,\ldots,n)^2(1,2)(1,2,\ldots,n)^{-2} &= (3,4)\end{aligned}$$

וכן הלאה. באופן כללי,

$$(1,2,\ldots,n)^m(1,2)(1,2,\ldots,n)^{-m}=(m+1,m+2)$$

לכן כל תמורה מהצורה $(m,m+1)$ אפשר לכתוב כמכפלה של התמורות $(1,2)$ ו-$(1,2,\ldots,n)$. בסך הכל נקבל

$$S_n=\langle(1,2),(1,2,\ldots,n)\rangle$$

$\square$

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 7. (המשך שאלה 6) הראו כי אם σ הוא מחזור מאורך n כלשהו, ואם τ חילוף עוקב כלשהו (כלומר הוא חילוף מהצורה $(m-1,m)$, או החילוף $(n1)$), אזי מתקיים $S_n=\langle\tau,\sigma\rangle$. זו למעשה הכללה של השאלה, המראה כי יכולנו לבחור כל מחזור מאורך n וכל חילוף עוקב, ולא רק את אלו הנתונים.

שאלה 8. (המשך שאלה 6) הראו כי אם p ראשוני, σ הוא מחזור מאורך p כלשהו, ואם τ חילוף כלשהו (לא בהכרח חילוף עוקב), אזי מתקיים $S_p=\langle\tau,\sigma\rangle$ (רמז: אם $\tau=(ab)$, מצאו חזקה של σ, σ^k, כך ש: $\sigma^k(a)=b$. אחר כך, חשבו את הסדר של σ^k, השתמשו באוטומורפיזם הצמדה מסויים של S_p, ובתרגיל הקודם).

שאלה 9. הוכיחו:

א. A_n נוצר על ידי כל המחזורים מאורך 3.

ב. A_n נוצר על ידי כל המחזורים מהצורה $(1ij)$.

ג. (*) A_n נוצר על ידי כל המחזורים מהצורה $(12i)$.

בהצלחה!