פתרון תרגיל 1- סדרות וגבול של סדרה

1. (א) נוכיח כי הסדרה $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$ מתכנסת ל- $\frac{2}{3}$:

בהינתן $\varepsilon > 0$, ניקח $n_0 = \lceil \frac{1}{3\varepsilon} \rceil + 1 \in \mathbb{N}$, ואז לכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים:

$$\left|a_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n+(-1)^n}{3n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3n} - \frac{2}{3}\right| =$$

$$= \left|\frac{(-1)^n}{3n}\right| = \frac{1}{3n} \leq \frac{1}{3n_0} < \frac{1}{3\lceil\frac{1}{3\varepsilon}\rceil} \leq \frac{1}{3\cdot\frac{1}{3\varepsilon}} = \varepsilon$$

(ב) נוכיח כי הסדרה $a_n = \frac{5n}{n^2+3n+1}$ מתכנסת ל- 0:

בהינתן $\varepsilon > 0$, ניקח $n_0 = \lceil \frac{5}{\varepsilon} \rceil \in \mathbb{N}$, ואז לכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{5n}{n^2+3n+1} < \frac{5n}{n^2} =$$

$$= \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n_0} = \frac{5}{\lceil\frac{5}{\varepsilon}\rceil} \leq \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

(ג) נוכיח כי הסדרה $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ מתכנסת ל- 1:

בהינתן $\varepsilon > 0$, ניקח $n_0 = \lceil \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \rceil \in \mathbb{N}$, ואז לכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2-1}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n^2-1-(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \frac{2}{n^2+1} <$$

$$< \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n_0^2} = \frac{2}{\lceil\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\rceil^2} \leq \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right)^2} = \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

.2

(א)

$$\lim_{n\to\infty} a_n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{3n^2+1} - \sqrt{5n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{3n^2+1} - \sqrt{5n}\right)\left(\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{5n}\right)}{\left(\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{5n}\right)} =$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{3n^2+1-5n}{\left(\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{5n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(\sqrt{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{\frac{5}{n^3}}\right)} \to \frac{3}{0} = \infty$$

(ב)

לכל n טבעי $\frac{5n+2}{3n^2+1} > 0$ ולכן נחשב את הגבול של מה שבתוך השורש.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(3+\frac{1}{n^2})} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{3} = 0$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{0} = 0$

.3

נניח בשלילה שהסדרה $a_n = \sqrt{n+1}$ מתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$. אזי בפרט עבור $\varepsilon = 1$, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים: $|a_n - L| < 1$. נשים לב:

$$|a_n - L| < 1 \;\Rightarrow\; |\sqrt{n+1} - L| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < \sqrt{n+1} - L < 1$$

בפרט, $0 < \sqrt{n+1} < L+1$, ואם נעלה בריבוע: $n+1 < (L+1)^2 = L^2 + 2L + 1$, ז"א $n < L^2 + 2L$. נובע שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $\boldsymbol{n < L^2 + 2L}$. אבל $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל ולכן יש $n_1 \in \mathbb{N}$ המקיים $n_1 > max\{n_0,\ L^2 + 2L\}$, ז"א $n_1 \geq n_0$ ומקיים $\boldsymbol{n_1 > L^2 + 2L}$, וקיבלנו סתירה.

.4

(א) **הפרכה:** הסדרה $a_n = 10 + \frac{1}{n}$ מקיימת $a_n > 10$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אבל מתכנסת לגבול $L = 10$:
אכן, בהינתן $\varepsilon > 0$, ניקח $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1 \in \mathbb{N}$, ואז לכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים:

$$|a_n - 10| = \left|10 + \frac{1}{n} - 10\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

(ב) **הוכחה:** יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, לכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$. לפי אי־שוויון המשולש ההפוך מתקיים: $||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|$. בסה"כ לכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים: $||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \varepsilon$. לכן $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

(ג) **הפרכה:** הסדרה $a_n = (-1)^n$ מקיימת $a_n^2 = (-1)^{2n} = 1$, לכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 1$, אולם $\{a_n\}$ כלל לא מתכנסת: נניח בשלילה שהיא מתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$. אזי בפרט עבור $\varepsilon = 1$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים: $|a_n - L| < 1$. מצד אחד, אם ניקח $n > n_0$ זוגי נקבל: $|a_n - L| = |(-1)^n - L| = |1 - L| < 1$, כלומר $-1 < 1 - L < 1$, ז"א $\underline{0 < L < 2}$. מצד שני, אם ניקח $n > n_0$ אי־זוגי נקבל: $|a_n - L| = |(-1)^n - L| = |-1 - L| = |1 + L| < 1$, כלומר $-1 < L + 1 < 1$, ז"א $\underline{-2 < L < 0}$, וקיבלנו סתירה.

(ד) **הוכחה:** בתרגול הוכחנו שאם $\{b_n\}$ סדרה חיובית המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L > 0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{b_n} = \sqrt{L}$ (נעיר שלמעשה זה נכון גם אם $\{b_n\}$ אי־שלילית ו־$L \geq 0$). נתון שהסדרה $\{a_n\}$ חיובית, לכן גם הסדרה $\{a_n^2\}$ חיובית, ונתון $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = L > 0$. אז לפי הטענה מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2} = \sqrt{L}$. אבל $\sqrt{a_n^2} = |a_n| = a_n$ (שכן $a_n > 0$) ונקבל $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{L}$, כדרוש.