אנחנו פותרים את המבחן בקישור הבא.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^7(1+7x)(1-\cos(3x))}{\sin^4(5x)(e^x-1)^5}$$.א

נעזר בגבולות הידועים הבאים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

כעת לתרגיל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^7(1+7x)(1-\cos(3x))}{\sin^4(5x)(e^x-1)^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+7x)}{7x}\right)^7\cdot\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\cdot\left(\frac{5x}{\sin(5x)}\right)^4\cdot\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^5\cdot\frac{7^7 3^2}{5^4}=1^7\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^4\cdot 1^5\cdot\frac{7^7 3^2}{5^4}=\frac{7^7 3^2}{2\cdot 5^4}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$.ב

כלל הe

$$\lim f^g=\{f\to 1\}=e^{\lim g(f-1)}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}=\{\text{כלל ה}e\}=e^{\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)(1+x-1)}=e^{\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}=e^0=1$$

דרך אחרת:

אם $x>0$

$$(1+x)^{-1}\le(1+x)^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\le(1+x)^1$$

סנדביץ'!

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+2^{\frac{1}{n}}}$

$$\sqrt[n]{2^n\left(1+2^{\frac{1}{n}-n}\right)}=2\cdot\left(1+2^{\frac{1}{n}-n}\right)^{\frac{1}{n}}=2\cdot(1+0)^0=2$$

2. קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n^2]{e}-1\right)$

ראשית נחשב את גבול איברי הסדרה אם אפשר

$$e^{\frac{1}{n^2}}-1\to 0$$

כעת נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$$

נבדוק חברות עם $\sum\frac{1}{n^2}$

$$\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{1}{n^2}}\to 1$$

כי $\frac{1}{n^2}\to 0$ וכן $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

לכן הם חברים וכיוון שהטור איתו השווינו מתכנס, הטור הזה מתכנס בהחלט.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{\left(n^2\right)}}{n!}$

נעשה מבחן המנה, נחשב את גבול המנה בערך מוחלט

$$\frac{e^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^{n^2}}=\frac{e^{(n+1)^2-n^2}}{n+1}=\frac{e^{2n+1}}{n+1}\to\infty$$

גבול המנה גדול מ1, ולכן הטור כולו מתבדר! (הרי הסדרה כלל אינה שואפת לאפס)

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2+n}{n^3}$

ראשית, נשים לב שאפשר להפריד את הטור לסכום של שני טורים.

סכום של שני מתכנסים הוא מתכנס, סכום של מתכנס ומתבדר הוא מתבדר, וסכום של שני מתבדרים – לא ידוע.

תרגיל צד:

נניח $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אך הטור $\sum b_n$ מתכנס בתנאי

האם הטור $\sum a_n+b_n$ מתכנס בתנאי? בהחלט? מתבדר?

פתרון:

ראשית הוא מתכנס כסכום של שני מתכנסים, השאלה רק האם הוא מתכנס בהחלט.

נב"ש שהטור $\sum a_n+b_n$ מתכנס בהחלט. לכן גם

$$\sum(a_n+b_n)-a_n$$

מתכנס בהחלט, כלומר $\sum b_n$ מתכנס בהחלט, בסתירה.

נפריד את הטור

$$\sum\frac{(-1)^n}{n},\ \ \sum\frac{1}{n^2}$$

הטור הימני מתכנס בהחלט, והשמאל בתנאי ולכן סה"כ הסכום מתכנס בתנאי.

הערה:

אם היינו הולכים רגיל לגמרי

$$\sum\frac{(-1)^n n^2+n}{n^3}$$

$$\left|\frac{(-1)^n n^2+n}{n^3}\right|\le\frac{n^2+n}{n^3}\sim\frac{1}{n}$$

אז חייבים להתחכם איכשהו

תוספת: נוכיח שסכום מתכנסים בהחלט הוא מתכנס בהחלט.

נתון $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים בהחלט

$$|a_n+b_n|\le|a_n|+|b_n|$$

3. תהי a_n סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n-1}$, ונתון כי $a_1\ge 1$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

ב. נתון בנוסף כי הסדרה a_n מתכנסת לגבול סופי. מצאו את a_1.

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n-1}\ge 0$$

לכן הסדרה עולה.

ננסה בשביל הקטע להוכיח באינדוקציה שהסדרה עולה, לעיתים זה קשה יותר ולעיתים בלתי אפשרי.

צריך להוכיח שלכל n מתקיים כי $a_{n+1}\ge a_n$

בדיקה: צ"ל כי $a_2\ge a_1$

$$a_2=a_1+\sqrt{a_1-1}$$

$$a_2\ge a_1$$

$$a_1+\sqrt{a_1-1}\ge a_1$$

$$\sqrt{a_1-1}\ge 0$$

יהי n עבורו $a_{n+1}\ge a_n$

צ"ל כי $a_{n+2}\ge a_{n+1}$

$$a_{n+1}+\sqrt{a_{n+1}-1}\ge a_n+\sqrt{a_n-1}$$

הסבר למעבר האחרון

$$a_{n+1}\ge a_n$$

$$a_{n+1} - 1 \geq a_n - 1$$

$$\sqrt{a_{n+1} - 1} \geq \sqrt{a_n - 1}$$

ואז הוכחנו

$$a_{n+2} \geq a_{n+1}$$

כפי שצריך.

סעיף ב': אם הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי, אחרת היא שואפת לאינסוף.

נניח שהיא חסומה (במקרה הזה זה ממש נתון) ולכן $a_n \to L \in \mathbb{R}$

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה, ונראה אם נוכל ללמוד משהו חכם.

אולי נקבל גבול אפשרי, והוא יהיה חסם, ואז נוכיח באינדוקציה שהוא באמת חסם.

אולי נקבל שכל הגבולות אינם אפשריים מסיבות כאלה או אחרות, ולכן הסדרה אינה חסומה (לא במקרה זה)

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n + \sqrt{a_n - 1}$$

$$L = L + \sqrt{L - 1}$$

לכן $L = 1$

אם $a_1 > 1$ אז לכל n מתקיים כי $a_n \geq a_1 > 1$ ולכן גם

$$L \geq a_1 > 1$$

בסתירה.

ולכן נותר בלבד המקרה בו $a_1 = 1$.

.4

א. הוכיחו/הפריכו: אם $f''(x)<0$ לכל $x\in(0,1)$ אז לא ייתכן כי $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\infty$.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $f''(x)<0$ לכל $x\in(1,\infty)$ אז לא ייתכן כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

נתון בעצם שהפונקציה "בוכה" ושואלים על הגבולות האפשריים שלה.

נתחיל בסעיף ב' האם ייתכן שפונקציה בוכה ושואפת לאינסוף באינסוף (מימין)

שתי הפונקציות הבאות מפריכות את סעיף ב' ומראות כי הדבר ייתכן $\sqrt{x}$, $\ln(x)$

ברור שהגבול של שתי הפונקציות באינסוף הוא אינסוף.

כמו כן נחשב את הנגזרות השניות

$$(\ln(x))''=-\frac{1}{x^2}<0$$

$$\left(\sqrt{x}\right)''=\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt[3]{x^2}}<0$$

כעת נחזור לסעיף א', וננסה לעשות משהו.

מה ניתן להסיק מכך שהנגזרת השנייה שלילית? אז כבר דיברנו על קמירות וקעירות שעזרו לנו.

דבר נוסף, ניתן להסיק שהנגזרת הראשונה יורדת.

נבחר נקודה כלשהי בקטע $c\in(0,1)$ ולכן לכל $x\geq c$ מתקיים כי

$$f'(x)\leq f'(c)$$

ולכל $x\leq c$ מתקיים כי

$$f'(x)\geq f'(c)$$

נעביר אגף

$$f'(x)-f'(c)$$

ונבנה פונקציה

$$h(x)=f(x)-f'(c)x$$

נשים לב כי

$$h'(x)=f'(x)-f'(c)$$

מתקיים כי $h'(x)\geq 0$ בתחום $(0,c]$ וכן $h'(x)\leq 0$ בתחום $[c,1)$

ולכן ל-h יש מקסימום בנקודה c.

לכל $x\in(0,1)$ מתקיים כי $h(x)\leq h(c)$

כלומר

$$f(x) - f'(c)x \le f(c) - f'(c)c$$

$$f(x) \le f'(c)x + f(c) - f'(c)c$$

אמנם יש הרבה קבועים משונים, אך סה"כ הפונקציה מימין היא קו ישר.

גילינו שהפונקציה שלנו קטנה יותר מישר!

זה מוביל אותנו לכך שאין אסימפטוטה, כי לישר יש חיתוך עם הכביכול אסימפטוטה אנכית $x = 1$

במדויק

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \le \lim_{x\to 1^-} f'(c)x + f(c) - f'(c)c = f'(c) + f(c) - f'(c)c \in \mathbb{R}$$

ולכן לא ייתכן שהגבול הוא אינסוף.

הערה: בעצם ההשוואה

$$f(x) \le f'(c)x + f(c) - f'(c)c$$

אומרת שהפונקציה קטנה יותר מהמשיק שלה בנקודה c ואנחנו הוכחנו את זה באופן כללי לפונקציה "בוכה".

.5

א. תהי פונקציה f רציפה בקטע $(0,\infty)$ בעלת גבולות סופיים בקצות הקטע, כלומר $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי f חסומה בקטע $(0,\infty)$.

ב. הוכיחו/הפריכו: הפונקציה $\frac{\sin(x)}{x} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ חסומה בקטע $(0,\infty)$.

במקרה זה יש קשר בין הסעיפים, והסעיף השני יחסית קל.

דווקא אתחיל מסעיף ב', כאשר אני מניח שסעיף א' נכון.

נבדוק את הגבולות של הפונקציה מסעיף ב'

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin(x)}{x} = 0 + \frac{\text{חסומה}}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin(x)}{x} = \text{מתבדר}$$

אבל הגבולות של $\frac{\sin(x)}{x}$ באינסוף ובאפס קיימיים וסופיים, ולכן לפי סעיף א' זו פונקציה חסומה בקטע.

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ודאי חסומה בקטע, וסכום של חסומות היא חסומה.

כעת סעיף א': נב"ש ש f אינה חסומה מלעיל בקטע (הוכחה עבור מלרע דומה).

לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת נקודה $a_n \in (0,\infty)$ כך ש $f(a_n) > n$

בוודאי $f(a_n) \to \infty$ לפי חצי סנדביץ'

לa_n יש תת סדרה מונוטונית a_{k_n}

בוודאי עדיין

$$f(a_{k_n}) \to \infty$$

יש שלוש אפשרויות:

1. $a_{k_n} \to \infty$
2. $a_{k_n} \to 0$
3. $a_{k_n} \to c \in (0, \infty)$

כל אחת מן האפשרויות מובילה לסתירה.

באפשרות השלישית

$$a_{k_n} \to c$$

$$f(a_{k_n}) \to f(c) \neq \infty$$

באפשרות הראשונה

$$a_{k_n} \to \infty$$

$$f(a_{k_n}) \to \lim_{x \to \infty} f(x) \in \mathbb{R}$$

ושוב קיבלנו סתירה, ובאפשרות הנותרת נקבל סתירה באופן דומה כי יש גבול באפס.