

שאלה 1

תהי G חבורה מסדר 56. הוכיח שיש לה תת-חבורה 2-סילוב נורמלית או תת-חבורה 7-סילוב נורמלית.

תשובה:

$$\text{לפניהם } \frac{56}{2} = 28 \quad \text{ולפניהם } \frac{56}{7} = 8 \quad \text{ולפניהם } \frac{56}{4} = 14 \quad \text{ולפניהם } \frac{56}{8} = 7$$

מכיוון $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$ ו- $n_7 \in \{1, 2, 4, 8\} \iff n_7 \mid 18$ נובע $\exists k \in \mathbb{Z}$ מכך $n_7 = 1 + 7k$ ו- $n_7 \in \{1, 8\}$ ו- $n_7 \neq 1$ מכך $n_7 \mid 14$ ו- $n_7 \mid 28$. כלומר $n_7 \mid 28$.

מכיוון $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$ ו- $n_2 \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237, 239, 241, 243, 245, 247, 249, 251, 253, 255, 257, 259, 261, 263, 265, 267, 269, 271, 273, 275, 277, 279, 281, 283, 285, 287, 289, 291, 293, 295, 297, 299, 301, 303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 325, 327, 329, 331, 333, 335, 337, 339, 341, 343, 345, 347, 349, 351, 353, 355, 357, 359, 361, 363, 365, 367, 369, 371, 373, 375, 377, 379, 381, 383, 385, 387, 389, 391, 393, 395, 397, 399, 401, 403, 405, 407, 409, 411, 413, 415, 417, 419, 421, 423, 425, 427, 429, 431, 433, 435, 437, 439, 441, 443, 445, 447, 449, 451, 453, 455, 457, 459, 461, 463, 465, 467, 469, 471, 473, 475, 477, 479, 481, 483, 485, 487, 489, 491, 493, 495, 497, 499, 501, 503, 505, 507, 509, 511, 513, 515, 517, 519, 521, 523, 525, 527, 529, 531, 533, 535, 537, 539, 541, 543, 545, 547, 549, 551, 553, 555, 557, 559, 561, 563, 565, 567, 569, 571, 573, 575, 577, 579, 581, 583, 585, 587, 589, 591, 593, 595, 597, 599, 601, 603, 605, 607, 609, 611, 613, 615, 617, 619, 621, 623, 625, 627, 629, 631, 633, 635, 637, 639, 641, 643, 645, 647, 649, 651, 653, 655, 657, 659, 661, 663, 665, 667, 669, 671, 673, 675, 677, 679, 681, 683, 685, 687, 689, 691, 693, 695, 697, 699, 701, 703, 705, 707, 709, 711, 713, 715, 717, 719, 721, 723, 725, 727, 729, 731, 733, 735, 737, 739, 741, 743, 745, 747, 749, 751, 753, 755, 757, 759, 761, 763, 765, 767, 769, 771, 773, 775, 777, 779, 781, 783, 785, 787, 789, 791, 793, 795, 797, 799, 801, 803, 805, 807, 809, 811, 813, 815, 817, 819, 821, 823, 825, 827, 829, 831, 833, 835, 837, 839, 841, 843, 845, 847, 849, 851, 853, 855, 857, 859, 861, 863, 865, 867, 869, 871, 873, 875, 877, 879, 881, 883, 885, 887, 889, 891, 893, 895, 897, 899, 901, 903, 905, 907, 909, 911, 913, 915, 917, 919, 921, 923, 925, 927, 929, 931, 933, 935, 937, 939, 941, 943, 945, 947, 949, 951, 953, 955, 957, 959, 961, 963, 965, 967, 969, 971, 973, 975, 977, 979, 981, 983, 985, 987, 989, 991, 993, 995, 997, 999, 1001, 1003, 1005, 1007, 1009, 1011, 1013, 1015, 1017, 1019, 1021, 1023, 1025, 1027, 1029, 1031, 1033, 1035, 1037, 1039, 1041, 1043, 1045, 1047, 1049, 1051, 1053, 1055, 1057, 1059, 1061, 1063, 1065, 1067, 1069, 1071, 1073, 1075, 1077, 1079, 1081, 1083, 1085, 1087, 1089, 1091, 1093, 1095, 1097, 1099, 1101, 1103, 1105, 1107, 1109, 1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1121, 1123, 1125, 1127, 1129, 1131, 1133, 1135, 1137, 1139, 1141, 1143, 1145, 1147, 1149, 1151, 1153, 1155, 1157, 1159, 1161, 1163, 1165, 1167, 1169, 1171, 1173, 1175, 1177, 1179, 1181, 1183, 1185, 1187, 1189, 1191, 1193, 1195, 1197, 1199, 1201, 1203, 1205, 1207, 1209, 1211, 1213, 1215, 1217, 1219, 1221, 1223, 1225, 1227, 1229, 1231, 1233, 1235, 1237, 1239, 1241, 1243, 1245, 1247, 1249, 1251, 1253, 1255, 1257, 1259, 1261, 1263, 1265, 1267, 1269, 1271, 1273, 1275, 1277, 1279, 1281, 1283, 1285, 1287, 1289, 1291, 1293, 1295, 1297, 1299, 1301, 1303, 1305, 1307, 1309, 1311, 1313, 1315, 1317, 1319, 1321, 1323, 1325, 1327, 1329, 1331, 1333, 1335, 1337, 1339, 1341, 1343, 1345, 1347, 1349, 1351, 1353, 1355, 1357, 1359, 1361, 1363, 1365, 1367, 1369, 1371, 1373, 1375, 1377, 1379, 1381, 1383, 1385, 1387, 1389, 1391, 1393, 1395, 1397, 1399, 1401, 1403, 1405, 1407, 1409, 1411, 1413, 1415, 1417, 1419, 1421, 1423, 1425, 1427, 1429, 1431, 1433, 1435, 1437, 1439, 1441, 1443, 1445, 1447, 1449, 1451, 1453, 1455, 1457, 1459, 1461, 1463, 1465, 1467, 1469, 1471, 1473, 1475, 1477, 1479, 1481, 1483, 1485, 1487, 1489, 1491, 1493, 1495, 1497, 1499, 1501, 1503, 1505, 1507, 1509, 1511, 1513, 1515, 1517, 1519, 1521, 1523, 1525, 1527, 1529, 1531, 1533, 1535, 1537, 1539, 1541, 1543, 1545, 1547, 1549, 1551, 1553, 1555, 1557, 1559, 1561, 1563, 1565, 1567, 1569, 1571, 1573, 1575, 1577, 1579, 1581, 1583, 1585, 1587, 1589, 1591, 1593, 1595, 1597, 1599, 1601, 1603, 1605, 1607, 1609, 1611, 1613, 1615, 1617, 1619, 1621, 1623, 1625, 1627, 1629, 1631, 1633, 1635, 1637, 1639, 1641, 1643, 1645, 1647, 1649, 1651, 1653, 1655, 1657, 1659, 1661, 1663, 1665, 1667, 1669, 1671, 1673, 1675, 1677, 1679, 1681, 1683, 1685, 1687, 1689, 1691, 1693, 1695, 1697, 1699, 1701, 1703, 1705, 1707, 1709, 1711, 1713, 1715, 1717, 1719, 1721, 1723, 1725, 1727, 1729, 1731, 1733, 1735, 1737, 1739, 1741, 1743, 1745, 1747, 1749, 1751, 1753, 1755, 1757, 1759, 1761, 1763, 1765, 1767, 1769, 1771, 1773, 1775, 1777, 1779, 1781, 1783, 1785, 1787, 1789, 1791, 1793, 1795, 1797, 1799, 1801, 1803, 1805, 1807, 1809, 1811, 1813, 1815, 1817, 1819, 1821, 1823, 1825, 1827, 1829, 1831, 1833, 1835, 1837, 1839, 1841, 1843, 1845, 1847, 1849, 1851, 1853, 1855, 1857, 1859, 1861, 1863, 1865, 1867, 1869, 1871, 1873, 1875, 1877, 1879, 1881, 1883, 1885, 1887, 1889, 1891, 1893, 1895, 1897, 1899, 1901, 1903, 1905, 1907, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, 1919, 1921, 1923, 1925, 1927, 1929, 1931, 1933, 1935, 1937, 1939, 1941, 1943, 1945, 1947, 1949, 1951, 1953, 1955, 1957, 1959, 1961, 1963, 1965, 1967, 1969, 1971, 1973, 1975, 1977, 1979, 1981, 1983, 1985, 1987, 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023, 2025, 2027, 2029, 2031, 2033, 2035, 2037, 2039, 2041, 2043, 2045, 2047, 2049, 2051, 2053, 2055, 2057, 2059, 2061, 2063, 2065, 2067, 2069, 2071, 2073, 2075, 2077, 2079, 2081, 2083, 2085, 2087, 2089, 2091, 2093, 2095, 2097, 2099, 2101, 2103, 2105, 2107, 2109, 2111, 2113, 2115, 2117, 2119, 2121, 2123, 2125, 2127, 2129, 2131, 2133, 2135, 2137, 2139, 2141, 2143, 2145, 2147, 2149, 2151, 2153, 2155, 2157, 2159, 2161, 2163, 2165, 2167, 2169, 2171, 2173, 2175, 2177, 2179, 2181, 2183, 2185, 2187, 2189, 2191, 2193, 2195, 2197, 2199, 2201, 2203, 2205, 2207, 2209, 2211, 2213, 2215, 2217, 2219, 2221, 2223, 2225, 2227, 2229, 2231, 2233, 2235, 2237, 2239, 2241, 2243, 2245, 2247, 2249, 2251, 2253, 2255, 2257, 2259, 2261, 2263, 2265, 2267, 2269, 2271, 2273, 2275, 2277, 2279, 2281, 2283, 2285, 2287, 2289, 2291, 2293, 2295, 2297, 2299, 2301, 2303, 2305, 2307, 2309, 2311, 2313, 2315, 2317, 2319, 2321, 2323, 2325, 2327, 2329, 2331, 2333, 2335, 2337, 2339, 2341, 2343, 2345, 2347, 2349, 2351, 2353, 2355, 2357, 2359, 2361, 2363, 2365, 2367, 2369, 2371, 2373, 2375, 2377, 2379, 2381, 2383, 2385, 2387, 2389, 2391, 2393, 2395, 2397, 2399, 2401, 2403, 2405, 2407, 2409, 2411, 2413, 2415, 2417, 2419, 2421, 2423, 2425, 2427, 2429, 2431, 2433, 2435, 2437, 2439, 2441, 2443, 2445, 2447, 2449, 2451, 2453, 2455, 2457, 2459, 2461, 2463, 2465, 2467, 2469, 2471, 2473, 2475, 2477, 2479, 2481, 2483, 2485, 2487, 2489, 2491, 2493, 2495, 2497, 2499, 2501, 2503, 2505, 2507, 2509, 2511, 2513, 2515, 2517, 2519, 2521, 2523, 2525, 2527, 2529, 2531, 2533, 2535, 2537, 2539, 2541, 2543, 2545, 2547, 2549, 2551, 2553, 2555, 2557, 2559, 2561, 2563, 2565, 2567, 2569, 2571, 2573, 2575, 2577, 2579, 2581, 2583, 2585, 2587, 2589, 2591, 2593, 2595, 2597, 2599, 2601, 2603, 2605, 2607, 2609, 2611, 2613, 2615, 2617, 2619, 2621, 2623, 2625, 2627, 2629, 2631, 2633, 2635, 2637, 2639, 2641, 2643, 2645, 2647, 2649, 2651, 2653, 2655, 2657, 2659, 2661, 2663, 2665, 2667, 2669, 2671, 2673, 2675, 2677, 2679, 2681, 2683, 2685, 2687, 2689, 2691, 2693, 2695, 2697, 2699, 2701, 2703, 2705, 2707, 2709, 2711, 2713, 2715, 2717, 2719, 2721, 2723, 2725, 2727, 2729, 2731, 2733, 2735, 2737, 2739, 2741, 2743, 2745, 2747, 2749, 2751, 2753, 2755, 2757, 2759, 2761, 2763, 2765, 2767, 2769, 2771, 2773, 2775, 2777, 2779, 2781, 2783, 2785, 2787, 2789, 2791, 2793, 2795, 2797, 2799, 2801, 2803, 2805, 2807, 2809, 2811, 2813, 2815, 2817, 2819, 2821, 2823, 2825, 2827, 2829, 2831, 2833, 2835, 2837, 2839, 2841, 2843, 2845, 2847, 2849, 2851, 2853, 2855, 2857, 2859, 2861, 2863, 2865, 2867, 2869, 2871, 2873, 2875, 2877, 2879, 2881, 2883, 2885, 2887, 2889, 2891, 2893, 2895, 2897, 2899, 2901, 2903, 2905, 2907, 2909, 2911, 2913, 2915, 2917, 2919, 2921, 2923, 2925, 2927, 2929, 2931, 2933, 2935, 2937, 2939, 2941, 2943, 2945, 2947, 2949, 2951, 2953, 2955, 2957, 2959, 2961, 2963, 2965, 2967, 2969, 2971, 2973, 2975, 2977, 2979, 2981, 2983, 2985, 2987, 2989, 2991, 2993, 2995, 2997, 2999, 3001, 3003, 3005, 3007, 3009, 3011, 3013, 3015, 3017, 3019, 3021, 3023, 3025, 3027, 3029, 3031, 3033, 3035, 3037, 3039, 3041, 3043, 3045, 3047, 3049, 3051, 3053, 3055, 3057, 3059, 3061, 3063, 3065, 3067, 3069, 3071, 3073, 3075, 3077, 3079, 3081, 3083, 3085, 3087, 3089, 3091, 3093, 3095, 3097, 3099, 3101, 3103, 3105, 3107, 3109, 3111, 3113, 3115, 3117, 3119, 3121, 3123, 3125, 3127, 3129, 3131, 3133, 3135, 3137, 3139, 3141, 3143, 3145, 3147, 3149, 3151, 3153, 3155, 3157, 3159, 3161, 3163, 3165, 3167, 3169, 3171, 3173, 3175, 3177, 3179, 3181, 3183, 3185, 3187, 3189, 3191, 3193, 3195, 3197, 3199, 3201, 3203, 3205, 3207, 3209, 3211, 3213, 3215, 3217, 3219, 3221, 3223, 3225, 3227, 3229, 3231, 3233, 3235, 3237, 3239, 3241, 3243, 3245, 3247, 3249, 3251, 3253, 3255, 3257, 3259, 3261, 3263, 3265, 3267, 3269, 3271, 3273, 3275, 3277, 3279, 3281, 3283, 3285, 3287, 3289, 3291, 3293, 3295, 3297, 3299, 3301, 3303, 3305, 3307, 3309, 3311, 3313, 3315, 3317, 3319, 3321, 3323, 3325, 3327, 3329, 3331, 3333, 3335, 3337, 3339, 3341, 3343, 3345, 3347, 3349, 3351, 3353, 3355, 3357, 3359, 3361, 3363, 3365, 3367, 3369, 3371, 3373, 3375, 3377, 3379, 3381, 3383, 3385, 3387, 3389, 3391, 3393, 3395, 3397, 3399, 3401, 3403, 3405, 3407, 3409, 3411, 3413, 3415, 3417, 3419, 3421, 3423, 3425, 3427, 3429, 3431, 3433, 3435, 3437, 3439, 3441, 3443, 3445, 3447, 3449, 3451, 3453, 3455, 3457, 3459, 3461, 3463, 3465, 3467, 3469, 3471, 3473, 3475, 3477, 3479, 3481, 3483, 3485, 3487, 3489, 3491, 3493, 3495, 3497, 3499, 3501, 3503, 3505, 3507, 3509, 3511, 3513, 3515, 3517, 3519, 3521, 3523, 3525, 3527, 3529, 3531, 3533, 3535, 3537, 3539, 3541, 3543, 3545, 3547, 3549, 3551, 3553, 3555, 3557, 3559, 3561, 3563, 3565, 3567, 3569, 3571, 3573, 3575, 3577, 3579, 3581, 3583, 3585, 3587, 3589, 3591, 3593, 3595, 3597, 3599, 3601, 3603, 3605, 3607, 3609, 3611, 3613, 3615, 3617, 3619, 3621, 3623, 3625, 3627, 3629, 3631, 3633, 3635, 3637, 3639, 3641, 3643, 3645, 3647, 3649, 3651, 3653, 3655, 3657, 3659, 3661, 3663, 3665, 3667, 3669, 3671, 3673, 3675, 3677, 3679, 3681, 3683, 3685, 3687, 3689, 3691, 3693, 3695, 3697, 3699, 3701, 3703, 3705, 3707, 3709, 3711, 3713, 3715, 3717, 3719, 3721, 3723, 3725, 3727, 3729, 3731, 3733, 3735, 3737, 3739, 3741, 3743, 3745, 3747, 3749, 3$

שאלה 2

a. תהי G חבורה ותהי $H \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית כך ש- $|H| = 2$. הוכיח כי ($H \leq Z(G)$)

b. הוכיח או הפרך: תהי G חבורה ותהי $H \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית כך ש- $|H| = 3$. איזי ($H \leq Z(G)$)?

השובה:

$$h \neq e \quad \text{ולפ' } H = \{e, h\} \quad \forall g \in G \quad ghg^{-1} \in H \iff h \in H \trianglelefteq G$$

$$\{e, h\} = H = gHg^{-1} = \{geg^{-1}, ghg^{-1}\} = \{e, ghg^{-1}\}.$$

$$g \in G \quad \text{כך } h = ghg^{-1} \in H \iff h \in H$$

$h \in Z(G)$ כי $ghg^{-1} = hg$ נסויו, $g \in G$ כי $e \in Z(G)$ בירור כי $Z(G) \subseteq H \trianglelefteq G$

$$H = A_3, G = S_3 \quad \text{נראה גורר } (2)$$

$$H = \langle \sigma \rangle, G = D_3 \quad \text{נראה גורר } (1)$$

$$H = \text{ker}(\text{sign}) \subseteq H \quad [G:H] = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{בנ"מ } H \trianglelefteq G$$

$$S_3 \trianglelefteq G, (123) \in A_3 \quad \text{בנ"מ } |H|=3$$

$$(\tau \neq \sigma \text{ נ"מ } (12)(123) = (23) \neq (13) = (123)(12))$$

$$Z(G) \supseteq H \quad (\tau \notin Z(G) \text{ נ"מ } (123) \notin Z(G))$$

שאלה 3

לכל זוג של חבורות, קבע האם הן איזומורפיות:

- חבורה המנה $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $H = \langle ([2], [0]) \rangle$, $K = \langle ([0], [1]) \rangle$, כאשר $G/K \cong H$.
- החבורה $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ והחבורה \mathbb{Q} , שתיהן עם פעולה חיבור.
- החבורה $\langle Q/2 \rangle$ והחבורה $\langle Q/3 \rangle$, עם פעולה חיבור.

תשובות:

$$H = \{([2], [0]), ([0], [0])\}$$

$$K = \{([0], [1]), ([0], [0])\}$$

$$|G| = 8 \quad |H| = 2 \quad |K| = 2$$

$$\text{בנוסף } |G/H| = \frac{8}{2} = 4 = |G/K| \text{ ולכן } g^2 \in H \text{ ו } g^2 \in K \text{ אך } g \notin H \text{ ו } g \notin K.$$

$$g^2 = ([2_a], [2_b]) = ([2_a], [0]) \notin \{([2], [0]), ([0], [0])\} = H$$

$$(gH)^2 = g^2H = eH = e_{G/H} \quad gH \in G/H \text{ וכן } g^2 \in H.$$

$$g = ([1], [0]) \notin K \quad g^2 = ([2], [0]) \notin K$$

$$G/K \cong \mathbb{Z}_4 \quad G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = (1, 1) \quad \text{אם } \frac{m}{n} \in \mathbb{Z} \text{ או } \frac{m}{n} \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}$$

$$f\left(\frac{m}{2n}\right) + f\left(\frac{m}{2n}\right) = f\left(\frac{m}{2n} + \frac{m}{2n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) = (1, 1)$$

$$f\left(\frac{m}{2n}\right) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad g + g = (1, 1) \quad \text{אם } \frac{m}{2n} \in \mathbb{Z} \text{ או } \frac{m}{2n} \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}$$

$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ הינה פונקציה רציפה ב- \mathbb{Z} .
 מוכיחים $(1,0), (0,1)$ אינטראקטיבית.

$$f(m,n) = f((1,0)^m (0,1)^n) = f(1,0)^m f(0,1)^n$$

מכיוון $f(1,0), f(0,1)$ רציפות ב- \mathbb{Z} , f רציפה.

$$f(1,0) = \frac{m_1}{n_1}, f(0,1) = \frac{m_2}{n_2}$$

$$f(a,b) = f(1,0)^a f(0,1)^b = \frac{am_1}{n_1} + \frac{bm_2}{n_2} = \frac{am_1 n_2 + bn_1 m_2}{n_1 n_2}$$

בנוסף, מכיוון $n_1, n_2 - N$ סיביגותם של m_1, m_2 מוגבלת, f רציפה.

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$ מוכיחו ש- f לא רציפה. $\text{Im } f = \mathbb{Q}$.

הנובע מכך $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ לא אינטראקטיבי, $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. $\text{Im } f = \mathbb{Q}$.

ל- $f: \mathbb{Q}/\langle 2 \rangle \rightarrow \mathbb{Q}/\langle 3 \rangle$

$$f(x + \langle 2 \rangle) = \frac{3}{2}x + \langle 3 \rangle$$

$\mathbb{Q}/\langle 2 \rangle$ -ה נסיביגותה נסיביגות $\mathbb{Q}/\langle 3 \rangle$ כי $x, y \in \mathbb{Q}$ מוכיחו f .

$$x - y \in \langle 2 \rangle = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\}_{\mathbb{N}}$$

$$\frac{3}{2}x + \langle 3 \rangle = \frac{3}{2}y + \langle 3 \rangle \quad \text{מוכיחו } \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y \in \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\} = \langle 3 \rangle$$

פונקציונליות f

$$f(x + \langle 2 \rangle) + f(y + \langle 2 \rangle) = (\frac{3}{2}x + \langle 3 \rangle) + (\frac{3}{2}y + \langle 3 \rangle) =$$

$$(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y) + \langle 3 \rangle = \frac{3}{2}(x + y) + \langle 3 \rangle =$$

$$f(x + y + \langle 2 \rangle) = f((x + \langle 2 \rangle) + (y + \langle 2 \rangle)).$$

$$f(\frac{2}{3}z + \langle 2 \rangle) = z + \langle 3 \rangle \quad \text{מוכיחו } z + \langle 3 \rangle \in \mathbb{Q}/\langle 3 \rangle \quad \text{מוכיחו } f$$

$$\Leftarrow f(x + \langle 2 \rangle) = f(y + \langle 3 \rangle) \quad \text{מוכיחו } f$$

$$\Leftarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y \in \langle 3 \rangle = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\} \Leftarrow \frac{3}{2}x + \langle 3 \rangle = \frac{3}{2}y + \langle 3 \rangle$$

$$\Leftarrow x - y \in \langle 2 \rangle = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$\Leftarrow x + \langle 2 \rangle = y + \langle 2 \rangle \quad \text{מוכיחו } f$$

שאלה 4

$\sigma = (12) \in S_4$

a. מצא את המרכז $C_{S_4}(\sigma)$.

b. תן רשימה של נציגים של כל קוטט ב- $C_{S_4}(\sigma)$.

חשיבות: 1

: $\forall \tau \in S_4 \exists e \in C_{S_4}(\sigma)$

$$\{\tau(1), \tau(2)\} = \{1, 2\} \Leftrightarrow (12) = \sigma = \tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(1) \tau(2)) \Leftrightarrow \sigma \tau = \tau \sigma \Leftrightarrow \tau \in C_{S_4}(\sigma)$$

: $\forall \tau \in C_{S_4}(\sigma) \exists e \in S_4$

$$\tau \in \{e, (34)\} \Leftrightarrow \tau(1)=1, \tau(2)=2 \quad (1)$$

$$\tau \in \{(12), (12)(34)\} \Leftrightarrow \tau(1)=2, \tau(2)=1 \quad (2)$$

$$C_{S_4}(\sigma) = \{e, (12), (34), (12)(34)\}$$

הנורמה הניתנת ממנה נובעת (*) 2

$$|C_{\text{conj}}(\sigma)| = [G : C_G(\sigma)] \quad (G = S_4)$$

$$|C_G(\sigma)| = 4 \Leftrightarrow 6 = \frac{|G|}{|C_G(\sigma)|} = \frac{24}{|C_G(\sigma)|}$$

$C_{S_4}(\sigma)$ -> קבוצה ישרה של נציגי המרכז $C_{S_4}(\sigma)$ כיוון $|C_{S_4}(\sigma)| = 4$ -> ניבול.

: מילויים שמייצגים את קבוצת נציגי המרכז 2

$$\{e, (12), (34), (12)(34)\}$$

$$\{(13), (123), (134), (1234)\}$$

$$\{(14), (124), (143), (1243)\}$$

$$\{(23), (132), (234), (1342)\}$$

$$\{(24), (142), (243), (1432)\}$$

$$\{(13)(24), (1423), (1324), (14)(23)\}$$

אנו נוכיח כי σ מוגדרת כפונקציית אובייקט של המבנה (S, τ) .

לכל $x \in S$ נקבע $\sigma(x) = \tau^{-1}(\tau(x))$. נוכיח כי σ היא פונקציית אובייקט של המבנה (S, τ) .

$$\tau_2^{-1}\tau_1\sigma = \sigma\tau_2^{-1}\tau_1 \iff \tau_2^{-1}\tau_1\sigma\tau_2^{-1}\tau_2 = \sigma \iff \tau_1\sigma\tau_2^{-1} = \tau_2\sigma\tau_2^{-1}$$

נוכיח כי $\tau_1, \tau_2 \in C_{S_y}(\sigma) \iff \tau_1\sigma\tau_2^{-1} = \tau_2\sigma\tau_2^{-1}$.

ההכרה הטעינה ש- σ מוגדרת כפונקציית אובייקט של המבנה (S, τ) .

$$(12), (13), (14), (23), (24), (34)$$

$$\text{לכל } \tau \in S, \text{ נוכיח } \tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1) \ \tau(2)) - e$$

$$(12) = e(12)e^{-1}$$

$$(13) = (23)(12)(23)^{-1}$$

$$(14) = (24)(12)(24)^{-1}$$

$$(23) = (13)(12)(13)^{-1}$$

$$(24) = (14)(12)(14)^{-1}$$

$$(34) = ((13)(24))(12)((13)(24))^{-1}$$

ההכרה הטעינה ש- $\{\text{id}, (23), (24), (13), (14), (13)(24)\}$ מוגדרת כפונקציית אובייקט של המבנה (S, τ) .

שאלה 5

- a. הוכח שהחבורה הדיחדרלית D_n פתרה לכל n .
- b. ידי $f : S_5 \rightarrow D_{120}$ הומומורפיזם. הוכח כי

תשובה:

לעתה נוכיח כי $\langle \sigma \rangle \trianglelefteq D_n$. $\{e\} \trianglelefteq \langle \sigma \rangle \trianglelefteq D_n$ כי $\langle \sigma \rangle$ הוא קבוצה סגורה ביחס למכרז. $\langle \sigma \rangle \trianglelefteq D_n$ כי $[D_n : \langle \sigma \rangle] = \frac{2n}{n} = 2$ (2)

בנוסף לכך, $\langle \sigma \rangle / \{e\} \cong \langle \sigma \rangle$

ולכן $\langle \sigma \rangle / \{e\} \cong \langle \sigma \rangle$ (1)

בנוסף לכך, $|D_n / \langle \sigma \rangle| = 2$ (2)

בנוסף לכך, אם $f : S_5 \rightarrow D_{120}$ שומרת אינדקס נורמי, אז $f(\langle \sigma \rangle) \trianglelefteq D_{120}$ כי $\langle \sigma \rangle / \{e\} \cong \langle \sigma \rangle$ (1)

בנוסף לכך, $f(\langle \sigma \rangle) \trianglelefteq D_{120}$ כי $f(\langle \sigma \rangle) \trianglelefteq S_5$ (2)

בנוסף לכך, $f : S_5 \rightarrow D_{120}$ הינה אינדקס נורמי.

בנוסף לכך, $f(\langle \sigma \rangle) \trianglelefteq S_5$ כי S_5 קהומורפית.

בנוסף לכך, $A_5 \trianglelefteq f(\langle \sigma \rangle)$ כי $A_5 \trianglelefteq S_5$.

בנוסף לכך, $A_5 \trianglelefteq f(\langle \sigma \rangle)$ כי $f(\langle \sigma \rangle) \trianglelefteq S_5$.

בנוסף לכך, $\text{Im } f \cong S_5 / \ker f = S_5 / \{e\}$.

בנוסף לכך, $\text{Im } f \cong S_5$ כי $\text{Im } f \cong A_5$ כי $A_5 \trianglelefteq f(\langle \sigma \rangle)$ כי $f(\langle \sigma \rangle) \trianglelefteq S_5$.