כופלי לגרנז'

> שיטת כופלי לגרנז'
>
> נניח ש- $f_{(x,y,z)}$ ו- $g_{(x,y,z)}$ גזירות שתיהן. כדי למצוא את ערכי המקסימום המקומי והמינימום המקומי של f תחת האילוץ $g_{(x,y,z)} = 0$, נמצא את הערכים של x , y , z ו- λ אשר מקיימים את שתי המשוואות $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ו- $g_{(x,y,z)} = 0$.
>
> עבור פונקציות של שני משתנים, התנאים דומים רק ללא המשתנה z .

דוגמה מהספר (עמ' 1043) – שימוש בשיטת הכופלים של לגרנז'

מצא את הערכים הגדולים ביותר והקטנים ביותר שמקבלת הפונקציה $f_{(x,y)} = xy$ על האליפסה $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

פיתרון: אנו מחפשים את ערכי הקיצון של $f_{(x,y)} = xy$ תחת האילוץ $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$.
נמצא את ערכיהם של x , y ו- λ אשר מקיימים את משוואת הגרדיינט $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ואת המשוואה $g_{(x,y)} = 0$.

פתרון משוואת הגרדיינט:

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \ \ => \ \ y\hat{x} + x\hat{y} = \lambda\left(\frac{x}{4}\hat{x} + y\hat{y}\right) \ \ => \ \ y = \frac{\lambda x}{4} \ , \ x = \lambda y \ \ => \ \ 4y = \lambda(\lambda y) \ \ => \ \ 4 = \lambda^2 \ \ => \ \ \lambda = \pm 2$$

את האפשרות ש- $y = 0$ ואז גם $x = 0$ אנו שוללים, למרות היותה פיתרון של המשוואה, כי הנקודה $(0,0)$ אינה על האליפסה.

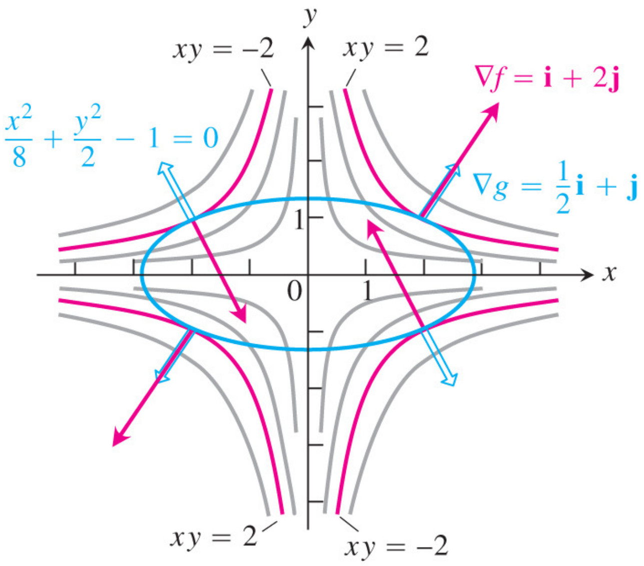
נציב אם כן $x = \pm 2y$ במשוואה $g_{(x,y)} = 0$:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \ \ => \ \ \frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \ \ => \ \ 4y^2 + 4y^2 = 8 \ \ => \ \ y = \pm 1 \ , \ x = \pm 2$$

ערכי הקיצון שמקבלת $f_{(x,y)} = xy$ על האליפסה $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ מתקבלים אם כן בארבע הנקודות $(\pm 2, -1)$, $(\pm 2, 1)$.
ערכי קיצון אלה הינם $xy = 2$ ו- $xy = -2$.

הפיתרון במבט גיאומטרי.

> קווי הרמה של הפונקציה $f_{(x,y)} = xy$ הם ההיפרבולות $xy = c$.
> על היפרבולות רחוקות מהראשית f גדולה יותר (בערכה המוחלט).
> אנו מעוניינים בערכי הקיצון של $f_{(x,y)}$ תחת התנאי שהנקודה (x,y) נמצאת גם על האליפסה $x^2 + 4y^2 = 8$. מבין כל ההיפרבולות אשר חותכות את האליפסה, אילו הן הרחוקות ביותר מהראשית?
> **אלה אשר רק "משפשפות" את האליפסה, ז"א משיקות לה.**
> בנקודות ההשקה, וקטור אשר מאונך להיפרבולה מאונך גם לאליפסה,
> כך ש- $\vec{\nabla} f = y\hat{x} + x\hat{y}$ הינו כפולה $(\lambda = \pm 2)$ של $\vec{\nabla} g = \frac{x}{4}\hat{x} + y\hat{y}$.
> בנק' $(2,1)$, $\vec{\nabla} f = \hat{x} + 2\hat{y}$, $\vec{\nabla} g = \frac{1}{2}\hat{x} + \hat{y}$, ו- $\vec{\nabla} f = 2\vec{\nabla} g$.
> בנק' $(-2,1)$, $\vec{\nabla} f = \hat{x} - 2\hat{y}$, $\vec{\nabla} g = -\frac{1}{2}\hat{x} + \hat{y}$, ו- $\vec{\nabla} f = -2\vec{\nabla} g$.



דוגמה מהספר (עמ' 1044) – מציאת ערכי קיצון של פונקציה על מעגל.

מצא את ערכי המקסימום והמינימום של הפונקציה $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 1$.

פיתרון: אנו מתאימים את הבעיה לתבנית לגרנז' עם $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ ו- $g_{(x,y)} = x^2 + y^2 - 1$, ומחפשים את הערכים של x , y ו- λ אשר מקיימים את המשוואות $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ו- $g_{(x,y)} = 0$

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad 3\hat{x} + 4\hat{y} = \lambda(2x\hat{x} + 2y\hat{y}) \quad => \quad 3\hat{x} + 4\hat{y} = 2\lambda x\hat{x} + 2\lambda y\hat{y} \quad => \quad x = \frac{3}{2\lambda} \ , \ y = \frac{2}{\lambda}$$

$$g_{(x,y)} = 0 \quad => \quad x^2 + y^2 = 1 \quad => \quad \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 1 \quad => \quad \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1 \quad => \quad 25 = 4\lambda^2 \quad => \quad \lambda = \pm\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \pm\frac{3}{5} \quad , \quad y = \frac{2}{\lambda} = \pm\frac{4}{5} \quad => \quad \left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) \ , \ \left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) \ , \ \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right) \ , \ \left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

נציב נקודות אלה ב- $f_{(x,y)}$ כדי לקבל את ערכי המקסימום והמינימום שלה על המעגל $x^2 + y^2 = 1$:

$$f_{\left(\frac{3}{5}\ ,\ \frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = 5 \quad , \quad f_{\left(-\frac{3}{5}\ ,\ \frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$f_{\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{7}{5} \quad , \quad f_{\left(-\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -5$$

אם כן, ערכי המקסימום והמינימום של הפונקציה $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ הם 5 ו- 5- בהתאמה.

<u>הפיתרון במבט גיאומטרי.</u>

קווי הרמה של $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ הם הישרים $3x + 4y = c$.

על ישרים רחוקים מהראשית f גדולה יותר (בערכה המוחלט).

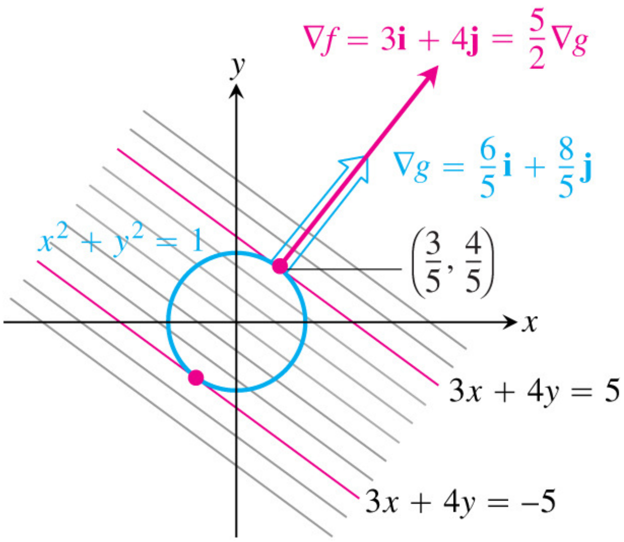
אנו מעוניינים בערכי הקיצון של $f_{(x,y)}$ תחת התנאי שהנקודה (x,y) נמצאת גם על המעגל $x^2 + y^2 = 1$. מבין כל הישרים אשר חותכים את המעגל, אילו הם הרחוקים ביותר מהראשית?

אלה אשר משיקים למעגל. הם הרחוקים ביותר מהראשית.

בנקודות ההשקה, וקטור אשר מאונך לישר מאונך גם למעגל,

כך ש- $\vec{\nabla} f = 3\hat{x} + 4\hat{y}$ הינו כפולה ($\lambda = \pm\frac{5}{2}$) של $2x\hat{x} + 2y\hat{y}$.

בנק' $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, $\vec{\nabla} f = 3\hat{x} + 4\hat{y}$, $\vec{\nabla} g = \frac{6}{5}\hat{x} + \frac{8}{5}\hat{y}$, ו- $\vec{\nabla} f = \frac{5}{2}\vec{\nabla} g$.



הערך המקסימאלי שמקבלת הפונקציה $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ הוא 5, וזה קורה בנקודה $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

הערך המינימאלי שהיא מקבלת על המעגל הוא 5-, והדבר קורה בנקודה $\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

בשתי נקודות אלה שעל המעגל, ורק בשתי אלה, $\vec{\nabla} f$ הינו כפולה סקלרית של $\vec{\nabla} g$.

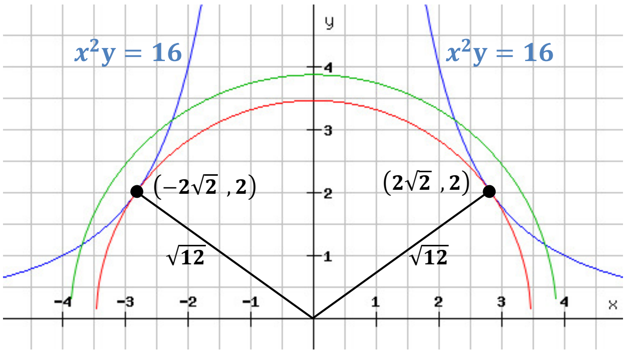
בציור מוראים שני הגרדיינטים האלה בנקודת המקסימום של f על המעגל, אך לא בנקודת המינימום שלה.

דוגמה נוספת – מציאת המרחק המינימאלי של עקומה מראשית הצירים.

מצא את המרחק המינימאלי של העקומה $x^2y = 16$ מראשית הצירים.

פיתרון: כשאנו דנים במרחק מראשית הצירים, אנו דנים בעצם ברדיוס R של מעגל קנוני מהצורה $R^2 = x^2 + y^2$.
עלינו לגלות היכן מעגל כזה משיק לעקומה הנדונה, וכך נקבל את הנקודות עליה שהינן הקרובות ביותר לראשית.

קווי הרמה של $f_{(x,y)} = x^2 + y^2$ הם המעגלים $x^2 + y^2 = c$.
ככל שהמעגלים קטנים יותר, f קטנה יותר.
אנו מעוניינים בערך המינימאלי של $f_{(x,y)}$ תחת התנאי שהנקודה (x, y)
נמצאת גם על העקום $x^2y = 16$. מבין כל המעגלים אשר חותכים את
העקום $x^2y = 16$, איזה הוא הקטן ביותר? **זה אשר משיק לעקום.**
בנקודות ההשקה, וקטור אשר מאונך לעקום מאונך גם למעגל,



נתאים את הבעיה לתבנית לגרנז' עם $f_{(x,y)} = x^2 + y^2$ ו- $g_{(x,y)} = x^2y - 16$, ונחפש את הערכים של x , y ו- λ אשר
מקיימים את המשוואות $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ו- $g_{(x,y)} = 0$

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad 2x\hat{x} + 2y\hat{y} = \lambda\left(2xy\hat{x} + x^2\hat{y}\right) \quad => \quad 2x = 2\lambda xy \ , \ 2y = \lambda x^2 \quad => \quad y = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad y = \frac{\lambda x^2}{2}$$

$$=> \quad \frac{\lambda x^2}{2} = \frac{1}{\lambda} \quad => \quad x^2 = \frac{2}{\lambda^2} \quad => \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\lambda}$$

$$g_{(x,y)} = 0 \quad => \quad x^2y = 16 \quad => \quad \frac{2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\lambda} = 16 \quad => \quad \frac{1}{\lambda^3} = 8 \quad => \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad => \quad x = \pm 2\sqrt{2} \quad , \quad y = 2$$

$$\left(-2\sqrt{2}\ ,\ 2\right) \qquad \left(2\sqrt{2}\ ,\ 2\right)$$

נציב נקודות אלה ב- $f_{(x,y)}$ כדי לקבל את ערך המינימום שלה על העקום $x^2y = 16$:

$$f_{(-2\sqrt{2}\ ,2)} = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 = 12 \qquad , \qquad f_{(2\sqrt{2}\ ,2)} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 = 12$$

המרחק המינימאלי של העקומה $x^2y = 16$ מראשית הצירים הוא $\sqrt{12}$ אם כן.

תרגול 11 אינפי 3

20 בינואר 2015

משפט הפונקציה ההפוכה:

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהי f פונקציה המוגדרת על הקבוצה, גזירה ברציפות.

תהי $a \in A$ עבורה $J_f(a) \neq 0$.

אזי, קיימת סביבה U של a ($U \subset A$) כך שהקבוצה $f(U)$ גם פתוחה.

בנוסף, f מעתיקה את U חח"ע על V ו-$f^{-1} : V \to U$ גם גזירה ברציפות, ומתקיים:

$$D_{f^{-1}}(f(x)) = (D_f(x))^{-1}$$

לכל $x \in U$ כאשר $D_f(x)$ היא מטריצת יעקובי.

במילים אחרות, אם f גזירה ברציפות והיעקוביאן לא מתאפס אז f הפיכה מקומית.

<u>תרגיל:</u>

תהי:

$$f(x,y,z) = (e^x \sin z, e^y \cos z, e^z xy)$$

הוכיחו כי f הפיכה מקומית בנקודה $(0,1,0)$, ומצאו את מטריצת יעקובי של f^{-1} בנקודה $(0,e,0)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את מטריצת היעקובי של f:

$$\begin{pmatrix} e^x \sin z & 0 & e^x \cos z \\ 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^z y & e^z x & e^z xy \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(0,1,0)$ שלנו נקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה הפיכה ולכן הדטרמיננטה שלה שונה מ-0.

כלומר, $J_f(0,1,0)\neq 0$ ולכן לפי משפט הפונקציה ההפוכה, נקבל ש$-f$ הפיכה מקומית בסביבת $(0,1,0)$.

כעת, מטריצת היעקובי של f^{-1} היא ההופכית של מטריצת היעקובי של f, כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר פונקציה:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי f אינה חח"ע בכל קטע פתוח המכיל את 0.

הדרכה: הוכיחו כי לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)$$

איזה תנאי של משפט הפונקציה ההפוכה אינו מתקיים?

<u>פתרון:</u>

נוכיח את אי־השיוויון שבהדרכה:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2 sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2$$

$$f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right) = \frac{2}{(4k+3)\pi} + 2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2 sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2$$

ומכיוון שמתקיים:

$$\frac{2}{(4k+3)\pi} < \frac{2}{(4k+1)\pi}$$

$$-2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2 < 2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2$$

נקבל שאכן:

$$f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)$$

כמו כן:

$$f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right) = \frac{2}{(4k+4)\pi} + 2\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right)^2 sin(2k\pi + \frac{4\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+4)\pi}$$

כלומר נותר להוכיח ש:

$$\frac{2}{(4k+4)\pi} > \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2$$

עם קצת אריתמטיקה נקבל:

$$16k + 16 > \pi(4k+3)$$

וזה אכן מתקיים, והוכחנו את אי־השיוויון.

מה נותן לנו אי־השיוויון?

בכל קטע פתוח מסביב ל-0 נקבל שהפונקציה שלנו אינה מונוטונית, כי:

$$\frac{2}{(4k+1)\pi} > \frac{2}{(4k+3)\pi} > \frac{2}{(4k+4)\pi}$$

אך:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right)$$

ואנו יודעים שפונקציה רציפה וחח"ע היא מונוטונית (חשבו למה), ולכן הפונקציה שלנו אינה חח"ע.

התנאי שאינו מתקיים הוא גזירות ברציפות.

אם נחשב את הנגזרת של f נקבל:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

והגבול:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים, ולכן הנגזרת אינה רציפה.

קיצון עם אילוץ:

אנו רוצים למצוא נקודת קיצון של פונקציה $f=f(x_1,\ldots,x_n)$ כאשר יש לנו אילוצים:

$$g_i(x_1,\ldots,x_n)=0$$

כאשר $1\le i\le m$.

אילוץ פירושו תנאי מסויים שהנקודה צריכה לקיים.

כדי לחשב למצוא קיצון שכזה, נגדיר פונקציה חדשה:

$$L=L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i+f$$

פונקציה זו נקראת הלגרנז'יאן. נחפש את הקיצון של הלגרנז'יאן בשיטות שאנו מכירים (השוואת גרדיאנט ל-0 וכו').

הקיצון שנמצא הוא הקיצון שלנו תחת האילוצים הנתונים.

<u>תרגיל:</u>

דוגמה קלה מויקיפדיה.

יש לנו פחית גלילית עם נפח V, ואנו רוצים למצוא את שטח הפנים המינימלי האפשרי לפחית כזאת.

<u>פתרון:</u>

לחישוב שטח פנים A אנו צריכים 2 משתנים - גובה הגליל ורדיוסו (מחוגו, בעברית צחה).

כלומר, נחקור את הפונקציה:

$$A(r,h)=2\pi r^2+2\pi rh$$

עם האילוץ:

$$V-\pi r^2h=0$$

הלגרנז'יאן שלנו היא:

$$L(r,h,\lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda\left(V - \pi r^2 h\right)$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל:

$$L_r = 4\pi r + 2\pi h - 2\lambda\pi hr = 0$$

$$L_h = 2\pi r - \lambda\pi r^2$$

$$L_\lambda = V - \pi r^2 h = 0$$

ואם נפתור את המשוואות נקבל:

$$h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}, r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

נציב בפונקציה A ונקבל את שטח הפנים המינימלי.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את נקודות הקיצון הגלובאליות של הפונקציה $f(x,y) = x+y$ בתחום:

$$D = \{(x,y)|xy \geq 4, x+2y \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$$

<u>פתרון:</u>

בדומה לשאלה על המשולש מתרגול קודם.

קודם כל, נחפש נקודות חשודות בתוך התחום. נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל:

$$(1,1) = (0,0)$$

וזה כמובן לא אפשרי. לכן אין נקודות חשודות בפנים התחום (וקל וחומר שאין שם קיצון).

נחפש נקודות חשודות על השפה.

ראשית, במקרים $x = 0$ ו-0 $y =$ הנקודות אינן בתחום, כי נדרש $xy \geq 4$.

אם $x + 2y = 9$ אז $x + y = 9 - y$, כלומר נחפש נקודות קיצון של:

$$9 - y$$

וזהו קו ישר, והקיצון שלו תתקבלנה בקצוותיו. כלומר, כאשר $x + 2y = 9$ וגם $xy = 4$.
נפתור את שתי המשוואות האלו, ונקבל: $y = 4, y = \frac{1}{2}$.
לכן, הנקודות החשודות הן: $(1,4), (8, \frac{1}{2})$.
נותר לחפש נקודות חשודות על $xy = 4$. כלומר:

$$y = \frac{4}{x}$$

נגזור, נשווה ל-0 ונקבל:

$$1 - \frac{4}{x^2} = 0$$

ולכן: $x = \pm 2$.
נזכור כי $x \geq 0$ ולכן רק $x = 2$ מתאים ולכן הנקודה החשודה היא $(2,2)$.
כעת נבדוק מהו הערך של f בכל אחת מהנקודות החשודות:

$$f(2,2) = 4$$

$$f(8, \frac{1}{2}) = 8\frac{1}{2}$$

$$f(1,4) = 5$$

ולכן $(2,2)$ היא נקודת מינימום גלובאלי בתחום D, ו$-(8,\frac{1}{2})$ היא נקודת מקסימום גלובאלי בתחום D.
שימו לב שלא השתמשנו בכופלי לגרנז'.

תרגיל:
מצאו את המרחק המינימלי בין הנקודה $(0,0)$ להיפרבולה:

$$7x^2 + 8xy + y^2 = 45$$

פתרון:
הפוקנציה שלנו צריכה לתאר מרחק, קרי: $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
עם זאת, אפשר למצוא קיצון לפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2$, מכיוון שאם נמצא נקודה שבה ריבוע המרחק הוא מינימלי, גם המרחק יהיה מינימלי.

האילוץ שלנו הוא:

$$g(x,y) = 7x^2 + 8xy + y^2 - 45$$

ולכן הלגרנז'יאן תהיה:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(7x^2 + 8xy + y^2 - 45)$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל:

$$L_x = 2x + 14\lambda x + 8\lambda y = 0$$

$$L_y = 2y + 2\lambda y + 8\lambda x = 0$$

$$L_\lambda = 7x^2 + 8xy + y^2 - 45 = 0$$

נפתור את המשוואות ונקבל:

$$\lambda = 1$$

ואת הנקודות $(2,1),(-2,-1)$.
נציב אותן בפונקציה ונקבל:

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 5$$

נזכור שזהו ריבוע המרחק, ולכן המרחק הוא $\sqrt{5}$.