...

נגדיר פונקציה f לכל x בקבוצת קנטור C: נציג את x בבסיס טרינארי, נחליף כל 2 ב1(נבחר תמיד בהצגה שלא מופיע בה 1 - לפי התכונות של קבוצת קנטור יש הצגה כזו), ונקרא את הביטוי שקיבלנו בבסיס בינארי.

עבור $x \notin C$, נבחר את המספרים בקצוות הקטע הפתוח שהוסר בבניית C המכיל את x. הערכים שf תיתן בקצוות הקטע יהיו שווים, ולכן זה יהיה הערך של $f(x)$.

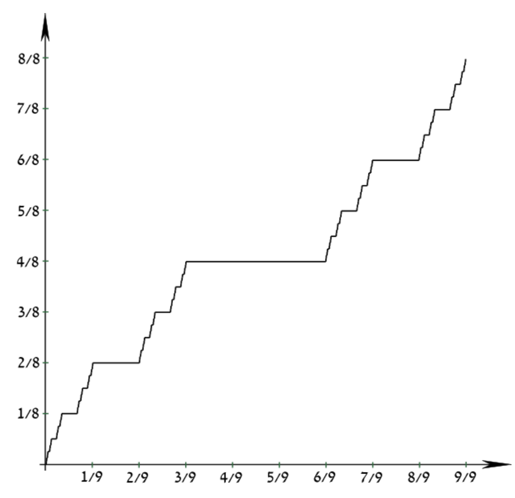
...

לפונקציה f קוראים פונקציית קנטור, ויש לה תכונות ייחודיות ההופכות אותה לדוגמה נגדית חשובה.

דוגמאות

- $0 = 0.000\ldots_3 \in C$ ולכן $f(0) = 0.000\ldots_2 = 0$
- $1 = 0.222\ldots_3 \in C$ ולכן $f(1) = 0.111\ldots_2 = 1$
- $\frac{1}{3} = 0.1_3 = 0.0222\ldots_3 \in C$ ולכן $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0.0111\ldots_2 = \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{3} = 0.2_3 \in C$ ולכן $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0.1_2 = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2} = 0.111\ldots_3 \notin C$ ולכן $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$(כי אלו קצוות הקטע הפתוח ש$\frac{1}{2}$ הוסר איתו.

גרף



הגרף הזה נתן לפונקציית קנטור שם חיבה - "המדרגות של השטן"("Devil's Staircase")

נוכיח מספר תכונות

א. תמונת קבוצת קנטור תחת פונקציית קנטור היא $[0,1]$

ב. פונקציית קנטור היא מונוטונית לא יורדת בקטע $[0,1]$

ג. פונקציית קנטור היא רציפה

ד. פונקציית קנטור היא גזירה כב"מ בקטע $[0,1]$ עם נגזרת 0($\mathrm{d}m$)

הוכחה

א. יש להראות $f[C] = [0,1]$. נשאר הכלה דו כיוונית.

$\subseteq$ יהי $a \in f[C]$, אזי קיים $x = 0.x_1x_2x_3\ldots_3$ כך ש- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n/2}{2^n} = f(x) = a$. הספרות $\{x_n\}$ הן כזכור 0 או 2 ולכן

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0/2}{2^n} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n/2}{2^n}}_{a} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2/2}{2^n} = 1$$

ולכן $a \in [0,1]$.

$\supseteq$ יהי $a \in [0,1]$. נרשום את a בפיתוח בינארי $a = 0.a_1a_2a_3\ldots_2$. נגדיר את x ע"י כפל הספרות <u>הבינאריות</u> של a פי 2, ופירוש התוצאה בבסיס 3: $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} \in C$, ו-$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = a \Longleftarrow a \in f[C]$.

ב. יש להראות כי אם $x, y \in [0,1]$ מקיימים $x < y$ אזי $f(x) \leq f(y)$.

נוכיח תחילה את המקרה שבו $x, y \in C$: ובכן, $x < y$ ולכן יהי N מיקום הספרה הטרינארית הראשונה שבה x ו-y לא מתלכדים(כלומר $x_N = 0 < 2 = y_N$ ולכל $n < N$ $x_n = y_n$) (דוגמה: $\begin{matrix} x = 0.2200220\ldots \\ y = 0.2200222\ldots \end{matrix}$ - במקרה הזה $N = 7$).

$$f(x) - f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n/2}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n/2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{y_n - x_n}{2}}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\cancel{\frac{y_n}{2}} - \cancel{\frac{x_n}{2}}}{2^n} \right) + \left(\frac{\frac{y_N - x_N}{2}}{2^N} \right) + \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\frac{y_n - x_n}{2}}{2^n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\frac{y_n - x_n}{2}}{2^n} \geq \frac{1}{2^N} + \sum_{n=N+1}^{02\infty} \frac{\frac{0 - \cancel{2}}{\cancel{2}}}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2^N} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} - \frac{\frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 0 \implies f(x) \leq f(y)$$

עבור $x, y \in [0,1]$ כלשהם נמצא $x', y' \in C$ המקיימים

$$x' \leq x \qquad y' \geq y \qquad f(x') = f(x) \qquad f(y') = f(y)$$

כלומר: x' הוא קצה הקטע השמאלי שx הוסר יחד איתו, וy' הוא קצה הקטע הימני שy הוסר יחד איתו.

ע"פ מה שהראנו $f\left(x\right)=f\left(x'\right)\leq f\left(y'\right)=f\left(y\right)$.

ג. f מונוטונית עולה, וידוע מאינפי שנקודות אי הרציפות של פונקציות מונוטוניות הן מסוג "קפיצה" בלבד. אך קפיצה לא תיתכן, כי אז יתקיים $f\left[C\right]=\left[0,1\right]$

ד. נוכיח ש$f'\left(x\right)=0$ בכל נקודה $x\in C^{\complement}=\left[0,1\right]\setminus C$. ובכן, יהי $x\in C^{\complement}$, אזי x נמצא באחד הקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^{n}},\frac{k+1}{3^{n}}\right)$ שבו f קבועה, ולכן $f'\left(x\right)$ קיים ושווה 0.

ומה לגבי C? היא ממידת לבג 0 ולכן הוכחנו כב"מ.

קצת על מבנה הבחינה

כל שאלה נפתחת בציטוט של הגדרות/משפטים מההרצאה, ולאחר מכן יש סעיף לא טריוויאלי, שבו יש להוכיח משהו על סמך ההגדרות/משפטים שצוטטו.

שאלה 1 ממבחן(מועד ב' תשע"ב)

יהי $\left(X,S,\mu\right)$ ממ"ח.

א. הגדירו פונקציה מדידה-S.

ב. הגדירו פונקציה אינטגרבילית $\mathrm{d}\mu$.

ג. צטטו את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג ב$\left(X,S,\mu\right)$.

ד. תהי $f_{n}:X\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות מדידות-S. נניח ש$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu<\infty$. הוכיחו שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(x\right)$ מתכנס כב"מ $\mathrm{d}\mu$.

הוכחת סעיף ד

נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $S_{N}\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{N}\left|f_{n}\left(x\right)\right|$. זו סדרה עולה של פונקציות מדידות ואי שליליות. ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג,

$$\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\cdots=\right)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu=\int_{X}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n}\right|\right)\mathrm{d}\mu<\infty$$

$\Longleftarrow$ $\int_{X}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_{n}\right|\right)\mathrm{d}\mu<\infty$. ע"פ משפט מההרצאה האינטגרל קטן מ∞ כב"מ $\Longleftarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_{n}\left(x\right)\right|<\infty$ כב"מ $\mathrm{d}\mu$ $\Longleftarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(x\right)$ מתכנס בהחלט כב"מ $\mathrm{d}\mu$ $\Longleftarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(x\right)$ מתכנס כב"מ $\mathrm{d}\mu$.

הגדרה

נאמר שהפונקציה f נשלטת ע"י הפונקציה $g \geq 0$ אם לכל $x \in X$, $|f(x)| \leq g(x)$.