תרגיל בית 1

פתרון שאלה 1

סעיף א

סדר 1, מעלה 1

סעיף ב

סדר 2, מעלה 1

סעיף ג

סדר 1, מעלה 2

סעיף ד

סדר 3, מעלה 1

פתרון שאלה 2

סעיף א

$$f(x,y)=y^4+2x-x^4$$

הפונקציה מוגדרת ורציפה בכל המישור.

$$f_y(x,y)=4y^3$$

הנגזרת החלקית מוגדרת ורציפה בכל המישור.

יש פתרון יחיד בכל המישור R^2.

סעיף ב

$$f(x,y)=\frac{x}{y-1}$$

הפונקציה מוגדרת ורציפה בתחום: $y>1$ ובתחום: $y<1$.

$$f_y(x,y)=\frac{-x}{(y-1)^2}$$

הנגזרת החלקית מוגדרת ורציפה בתחום: $y>1$ ובתחום: $y<1$.

יש פתרון יחיד בתחום $y>1$.

יש פתרון יחיד בתחום $y<1$.

סעיף ג

$$f(x,y)=y+\sqrt[3]{y}$$

הפונקציה מוגדרת ורציפה בכל המישור.

$$f_y(x,y)=1+\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

הנגזרת החלקית מוגדרת ורציפה בתחום: $y>0$ ובתחום: $y<0$.

יש פתרון יחיד בתחום $y>0$.

יש פתרון יחיד בתחום $y<0$.

סעיף ד

$$f(x,y)=\sqrt{x-y}$$

הפונקציה מוגדרת ורציפה בתחום: $y\le x$.

$$f_y(x,y)=\frac{-1}{2\sqrt{x-y}}.$$

הנגזרת החלקית מוגדרת ורציפה בתחום: $y<x$.

יש פתרון יחיד בתחום: $D=\{(x,y)|\alpha<x,y<\alpha\}$ כאשר α מספר ממשי.

שאלה 3

פתרו את המשוואות הליניאריות הבאות:

א. $y'+\frac{1}{x}y=3\cos(2x)$.

ב. $y'+3y=x+e^{-2x}$.

ג. $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2}$.

ד. $y'=\frac{y}{3x-y^2}$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y'+\frac{1}{x}y=0$.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=-\ln x+\ln c \Rightarrow y=\frac{c}{x}\ .$$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $y'+\frac{1}{x}y=3\cos(2x)$ $y=\frac{c(x)}{x}$.

$$\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}+\frac{c(x)}{x^2}=3\cos(2x) \Rightarrow c'(x)=3x\cos 2x\ .$$

נפתור את האינטגרל $\int 3x\cos 2x dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$u=3x \quad v=\frac{1}{2}\sin 2x$$
$$u'=3 \quad v'=\cos 2x$$
$$\int 3x\cos 2x dx=\frac{3x\sin 2x}{2}-\int\frac{3\sin 2x}{2}dx=\frac{3x\sin 2x}{2}+\frac{3\cos 2x}{4}\ .$$

סה"כ קיבלנו ש $c(x)=\frac{3x\sin 2x}{2}+\frac{3\cos 2x}{4}$ והפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית

$y_p=\frac{3\sin 2x}{2}+\frac{3\cos 2x}{4x}$. פתרון כללי של הלא הומוגנית $y=\frac{c}{x}+\frac{3\sin 2x}{2}+\frac{3\cos 2x}{4x}$.

<u>סעיף ב</u>

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y'+3y=0$.

$$\frac{dy}{dx}+3y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-3dx \Rightarrow \ln y=-3x+\ln c \Rightarrow y=\frac{c}{e^{3x}}\ .$$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $y'+3y=x+e^{-2x}$ $y=\frac{c(x)}{e^{3x}}$.

$$\frac{c'(x)}{e^{3x}}+\frac{-3c(x)}{e^{3x}}+\frac{3c(x)}{e^{3x}}=x+e^{-2x} \Rightarrow c'(x)=xe^{3x}+e^{x} \Rightarrow c(x)=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+e^{x}\ .$$

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית $y_p=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+e^{-2x}$.

פתרון כללי של הלא הומוגנית $y=\frac{c}{e^{3x}}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+\frac{1}{e^{2x}}$.

<u>סעיף ג</u>

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y'+\frac{2}{x}y=0$.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln y=-2\ln x+\ln c \Rightarrow y=\frac{c}{x^2}\ .$$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2}$ $y=\frac{c(x)}{x^2}$.

$\frac{x^2c'(x)-2xc(x)}{x^4}+\frac{2c(x)}{x^3}=\frac{\cos x}{x^2} \Leftarrow c'(x)=\cos x \Leftarrow c(x)=\sin x$.

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית $y_p=\frac{\sin x}{x^2}$. פתרון כללי של הלא הומוגנית

$y=\frac{c}{x^2}+\frac{\sin x}{x^2}$.

<u>סעיף ד</u>

$y'=\frac{y}{3x-y^2} \Leftarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{3x-y^2} \Leftarrow \frac{dx}{dy}=\frac{3x-y^2}{y} \Leftarrow x'-\frac{3}{y}x=-y$.

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $x'-\frac{3}{y}x=0$.

$\frac{dx}{dy}=\frac{3x}{y} \Leftarrow \frac{dx}{x}=\frac{3dy}{y} \Leftarrow \ln x=3\ln y+\ln c \Leftarrow x=cy^3$.

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $x'-\frac{3}{y}x=-y$ $x=c(y)y^3$.

$c'(y)y^3+3c(y)y^2-3c(y)y^2=-y \Leftarrow c'(y)=-\frac{1}{y^2} \Leftarrow c(y)=\frac{1}{y}$.

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית $y_p=\frac{1}{y}$. פתרון כללי של הלא הומוגנית $x=cy^3+\frac{1}{y}$.

<u>שאלה 4</u>

פתרו את משוואות ברנולי הבאות:

א. $x^2y'+2xy-y^3=0$.

ב. $y'+2y=y^2e^x$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

$x^2y'+2xy-y^3=0 \Leftarrow \frac{x^2y'}{y^3}+\frac{2x}{y^2}=1$.

נציב $t=\frac{1}{y^2} \Leftarrow t'=\frac{-2y'}{y^3}$.

$-\frac{x^2}{2}t'+2xt=1 \Leftarrow t'-\frac{4}{x}t=\frac{-2}{x^2}$ קיבלנו משוואה ליניארית.

נפתור את המשוואה ההומוגנית $t'-\frac{4}{x}t=0 \Leftarrow \frac{dt}{dx}=\frac{4}{x}t \Leftarrow \frac{dt}{t}=\frac{4}{x}dx \Leftarrow \ln t=4\ln x+\ln c$.

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית $t=cx^4$.

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית. נציב $t=c(x)x^4$ במשוואה $t'-\frac{4}{x}t=\frac{-2}{x^2}$.

$c'(x)x^4+4x^3c(x)-4x^3c(x)=\frac{-2}{x^2} \Leftarrow c'(x)=\frac{-2}{x^6} \Leftarrow c(x)=\frac{2}{5x^5}$.

פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית $t=\frac{2}{5x}$.

פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית $t=cx^4+\frac{2}{5x} \Leftarrow t=\frac{5cx^5+2}{5x} \Leftarrow \frac{1}{t}=\frac{5x}{5cx^5+2}$.

פתרון המשוואה: $y^2=\frac{5x}{5cx^5+2}$.

סעיף ב

$\frac{y'}{y^2}+\frac{2}{y}=e^x \Leftarrow y'+2y=y^2e^x$

נציב $t=\frac{1}{y} \Rightarrow t'=\frac{-y'}{y^2}$.

$-t'+2t=e^x \Rightarrow t'-2t=-e^x$ קיבלנו משוואה ליניארית.

נפתור את המשוואה ההומוגנית

$t'-2t=0 \Rightarrow \frac{dt}{dx}=2t \Rightarrow \frac{dt}{t}=2dx \Rightarrow \ln t=2x+\ln c \Rightarrow t=ce^{2x}$.

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית $t=ce^{2x}$.

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית. נציב $t=c(x)e^{2x}$ במשוואה $t'-2t=-e^x$.

$c'(x)e^{2x}+2c(x)e^{2x}-2c(x)e^{2x}=-e^x \Rightarrow c'(x)=-e^{-x} \Rightarrow c(x)=e^{-x}$.

פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית $t=e^x$.

פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית $t=ce^{2x}+e^x \Rightarrow y=\frac{1}{ce^{2x}+e^x}$.

פתרון המשוואה: $y=\frac{1}{ce^{2x}+e^x}$.

שאלה 5

פתרו את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'=\frac{x}{y} \\ y(0)=1 \end{cases}.$$

פתרון שאלה 5

נמצא פתרון כללי למשוואה $y'=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \Rightarrow ydy=xdx \Rightarrow y^2=x^2+c$

$y=\sqrt{x^2+c} \Rightarrow y=\sqrt{x^2+1}$.