<u>הפיתרון לבוחן מספר 1 :</u>

<u>פיתרון לשאלה 1: (שאלה מהכיתה)</u>

נסמן ב- Y את המשתנה המקרי המציין הצלחה בהוצאת אדום וכישלון אחרת.

מספר הראשים המתקבלים X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n, p, דהיינו $X\sim Bin(n,p)$. בהינתן $X=k$ (k שלם לא שלילי) הסיכוי להוציא כדור אדום הוא $1/(k+1)$ שכן הוכנסו לכד k כדורים לבנים ואדום יחיד. דהיינו $Y|X=k$ הוא משתנה ברנולי עם פרמטר $1/(k+1)$. בקיצור $Y|X\sim Ber\left(\frac{1}{1+X}\right)$. עתה לפי נוסחת ההסתברות השלמה :

$$P(Y=1)=\sum_{k=0}^{n}P(Y=1|X=k)\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1+k}\right)\cdot\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}=$$

$$\frac{1}{p(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k}$$

נציב $t=k+1$ ונקבל :

$$\frac{1}{p(n+1)}\sum_{t=1}^{n+1}\binom{n+1}{t}p^{t}(1-p)^{n+1-t}=$$

נוסיף ונחסר את הנסכם המתאים ל- $t=0$ על מנת לקבל טור של התפלגות בינומית:

$$\frac{1}{p(n+1)}\left[\underbrace{\sum_{t=0}^{n+1}\binom{n+1}{t}p^{t}(1-p)^{n+1-t}\ -\ \binom{n+1}{0}}_{=1}p^{0}(1-p)^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{p(n+1)}\left[1\ -\ (1-p)^{n+1}\right]$$

פיתרון לשאלה 2 : (שאלה מהתרגיל לבית)

א. נסמן ב-E את המאורע בו סוללה תפעל יותר מ-13 ימים. ונסמן ב-X_A את אורך החיים של סוללה שנבחרה מקרית ממפעל A. לפי הנתון $X_A \sim G(\frac{1}{20})$ ולכן,

$$P(E \mid A) = P(X_A > 13) = \sum_{t=14}^{\infty} P(X_A = t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{20}\right)^{13+k}\left(\frac{1}{20}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{20}\right)^{13}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{20}\right)^{k}\left(\frac{1}{20}\right)}_{=1} = \left(1-\frac{1}{20}\right)^{13} = 0.513$$

באופן דומה נגדיר את X_B באשר $X_B \sim G\left(\frac{1}{15}\right)$ ולכן $P(E \mid B) = P(X_B > 13) = \left(1-\frac{1}{15}\right)^{13} = 0.408$

ואת X_C באשר $X_C \sim G\left(\frac{1}{15}\right)$ ולכן $P(E \mid C) = P(X_C > 13) = \left(1-\frac{1}{12}\right)^{13} = 0.323$

ולכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה, $P(E) = 0.513\cdot\frac{1}{2} + 0.408\cdot\frac{1}{6} + 0.323\cdot\frac{1}{3} = 0.4322$

המשך תשובה 9:

ב. לפי נוסחת בייס: $P(A \mid E) = \dfrac{P(X_A > 13)\cdot P(A)}{P(E)} = \dfrac{0.513\cdot\frac{1}{2}}{0.4322} = 0.594$

פיתרון לשאלה 3:

פתרון. השאלה אמנם אינה דורשת זאת במפורש, אבל תמיד נוח להצטייד בכמה משתנים מקריים מוגדרים כראוי. נסמן ב־X את מספר הזריקות של חנן עד לקליעה הראשונה, וב־Y את מספר הזריקות של יואב עד לקליעה הראשונה. מכיוון שמדובר בסדרת נסיונות בלתי תלויים, $X \sim \mathrm{G}(\alpha)$ ו־$Y \sim \mathrm{G}(\beta)$,

בסעיף (א) שואלים מה ההסתברות לכך ששתי הנקודות הראשונות תושגנה ברצף. כלומר, לאחר סדרת כשלונות (של שני השחקנים, לסירוגין), אחד מהם קולע, ואחריו קולע מיד השחקן השני. מכיוון שחנן הוא הקולע ראשון, המאורע המבוקש הוא $\{X = Y\} \cup \{X = Y + 1\}$ ($X = Y$ פירושו שחנן קלע ראשון ומיד אחריו יואב, ו־$X = Y + 1$ פירושו שיואב קלע ראשון ומיד אחריו חנן). המאורעות $X = Y$ ו־$X = Y + 1$ זרים (לא יתכן ש־$X = Y = Y + 1$), ולכן ההסתברות היא

$$P(X = Y) + P(X = Y + 1).$$

$$
\begin{aligned}
P(X=Y+a) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=Y+a|Y=n)P(Y=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n+a|Y=n)P(Y=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n+a)P(Y=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^{n+a-1}\beta(1-\beta)^{n-1} \\
&= \alpha\beta(1-\alpha)^a \sum_{n=1}^{\infty}((1-\alpha)(1-\beta))^{n-1} \\
&= \frac{\alpha\beta(1-\alpha)^a}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} \\
&= \frac{\alpha\beta(1-\alpha)^a}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

(שימו לב, במעבר השלישי, לשימוש בכך ש־X, Y בלתי תלויים.)
מחישוב זה יוצא ש־

$$P(X=Y)+P(X=Y+1)=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}+\frac{\alpha\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-\alpha\beta}=\frac{\alpha\beta(2-\alpha)}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.$$

(אגב, אם $\alpha=\beta$, החישוב נותן $P(X=Y)+P(X=Y+1)=\alpha$. נסו להסביר עובדה זו באופן ישיר. הערה נוספת: חישובים כאלה קל בהרבה לבצע באותיות מאשר במספרים; אפשר ורצוי להציב את הערכים של α ו־β ברגע האחרון.)

לסעיף (ב), נסמן ב־W את מספר הנקודות שקולע יואב עד לקליעה הראשונה של חנן. ההתפלגות של W די מסובכת, ולכן איננו רוצים לחשב את התוחלת והשונות שלה ישירות. לעומת זאת, אם X ידוע, אז W הוא מספר הקליעות ב־$X-1$ נסיונות, ולכן $W|X \sim \mathrm{Bin}(X-1,\beta)$. מכאן מתקבל מיד ש־$\mathbf{E}(W|X)=\beta(X-1)$ וש־$\mathbf{V}(W|X)=\beta(1-\beta)(X-1)$. [אי־אפשר לענות לשאלה ב־"התוחלת היא βn כאשר n הוא מספר הזריקות עד לקליעה של חנן". התשובה צריכה להיות פונקציה של α ו־β, ללא משתנים שערכם אינו ידוע, וללא רשימות (אינסופיות) של אפשרויות.]

לפי חוק התוחלת החוזרת (שהוא וריאציה על נוסחת ההסתברות השלמה),

$$\mathbf{E}(W)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(W|X))=\mathbf{E}(\beta(X-1))=\beta(\mathbf{E}(X)-1)=\beta(\frac{1}{\alpha}-1)=\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha}.$$