מד"ר פתרון תרגיל 1

1. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $y' + \frac{1}{x}y = 3\cos(2x), x > 0$

מד"ר לינארית מסדר 1, $q(x) = 3\cos(2x)\,,\, p(x) = \frac{1}{x}$

הפתרון הכללי למדר מהצורה שכזו היא $y = e^{-\int p(x)dx} \cdot [\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c]$. לכן הפתרון הוא

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx} \cdot [\int 3\cos(2x)e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + c] = e^{-\ln|x|} \cdot [\int 3\cos(2x)e^{\ln|x|}dx + c] = \frac{1}{|x|} \cdot [\int 3\cos(2x)\,|x|\,dx + c]$$

נתון $x > 0$ לכן נוריד את הערך מוחלט:

$$y = \frac{1}{x} \cdot [\int 3\cos(2x)xdx + c] = \frac{1}{x} \cdot [\frac{3}{2}x\sin(2x) - \frac{3}{2}\int \sin(2x)dx + c] =$$

$$\frac{3}{x} \cdot [x\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + c] = 3\sin(x)\cos(x) + \frac{3}{4x}\cos(2x) + \frac{c}{x}$$ (בחישוב

עשינו אינטגרציה בחלקים)

לכן הפתרון הכללי הוא $\boxed{y = 3\sin(x)\cos(x) + \frac{3}{4x}\cos(2x) + \frac{c}{x}}$

ב. $2ydx - xdy = 0$

$$2ydx - xdy = 0 \Rightarrow 2ydx = xdy \Rightarrow 2\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \;/\int()$$

$$2\ln|x| + c = \ln|y| \Rightarrow |y| = e^{2\ln|x|+c} = e^{\ln|x|^2} \cdot e^c \Rightarrow y = \pm e^c \cdot x^2$$

נסמן $c = \pm e^c$ לכן הפתרונות הם $\boxed{y = c \cdot x^2}$. ($y = 0$ מתקבל עבור $c = 0$ לכן רגולרי).

ג. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2xy} + \frac{3y^2}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{3y}{2x}$ נציב $z = \frac{y}{x}\,,\, y = zx$ לכן $\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dx}x$ לאחר הצבה נקבל:

$z+\frac{dz}{dx}x=\frac{1}{2z}+\frac{3}{2}z \Leftarrow \frac{dz}{dx}x=\frac{1}{2}(\frac{1}{z}+z) \Leftarrow \frac{dx}{x}=\frac{2dz}{\frac{1}{z}+z}$ באגף ימין נכפיל את המונה

והמכנה ב z לכן $\frac{dx}{x}=\frac{2zdz}{1+z^2}$, נחשב $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$, נחשב $\int\frac{2zdz}{1+z^2}$ נציב $u=1+z^2$

$du=2zdz$ לכן $\int\frac{2zdz}{1+z^2}=\int\frac{1}{u}du=\ln|u|=\ln|1+z^2|$ לכן:

$\ln|x|=\ln|z^2+1|+c$ נציב בחזרה $z=\frac{y}{x}$ לכן $\ln|x|=\ln|1+\frac{y^2}{x^2}|+c=\ln(1+\frac{y^2}{x^2})+c$

לכן:

$|x|=e^{\ln|x|}=e^{\ln(1+\frac{y^2}{x^2})+c}=e^c\cdot e^{\ln(1+\frac{y^2}{x^2})}=e^c\cdot(1+\frac{y^2}{x^2})$ לכן:

$$x=\pm e^c\cdot(1+\frac{y^2}{x^2})=c\cdot(1+\frac{y^2}{x^2})\Rightarrow\frac{y^2}{x^2}=\frac{x}{c}-1\Rightarrow y^2=\frac{x^3}{c}-x^2\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{c}-x^2}$$

לכן הפתרון הוא $\boxed{y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{c}-x^2}}$

ד. $y'+3y=x+e^{-2x}$

מד"ר לינארית מסדר 1, $p(x)=3$, $q(x)=x+e^{-2x}$

הפתרון הכללי למדר מהצורה שכזו היא $y=e^{-\int p(x)dx}\cdot[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c]$

לכן הפתרון הוא: $y=e^{-\int 3dx}\cdot[\int(x+e^{-2x})e^{\int 3dx}dx+c]=e^{-3x}\cdot[\int(x+e^{-2x})e^{3x}dx+c]$

$$=e^{-3x}\cdot[\int xe^{3x}+e^{x}dx+c]=e^{-3x}\cdot[\int xe^{3x}dx+e^{x}+c]$$

נחשב $\int xe^{3x}dx$ בחלקים $\int xe^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}x-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}x-\frac{e^{3x}}{9}$ לכן:

הפתרון הוא $\boxed{y=e^{-3x}\cdot[\frac{1}{3}e^{3x}x-\frac{e^{3x}}{9}+e^{x}+c]=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+e^{-2x}+ce^{-3x}}$

ה. $(x^2+3xy+y^2)dx-x^2dy=0$

$(x^2+3xy+y^2)dx=x^2dy$ מחלק ב x^2dx :

$$\frac{(x^2+3xy+y^2)}{x^2}=\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{x^2}+\frac{3xy}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=1+3\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$$

נציב $z=\frac{y}{x}$, $y=zx$ לכן $\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dx}x$ לאחר הצבה נקבל:

$$z+\frac{dz}{dx}x=1+3z+z^2\Rightarrow\frac{dz}{dx}x=1+2z+z^2=(1+z)^2\Rightarrow\frac{dz}{(1+z)^2}=\frac{dx}{x}$$

נפעיל אינטגל:

$\int\frac{dz}{(1+z)^2}=\int\frac{dx}{x}+c\Rightarrow-\frac{1}{1+z}=\ln|x|+c$, נציב בהחזרה $z=\frac{y}{x}$ ונקבל:

$$-\frac{1}{1+\frac{y}{x}}=\ln|x|+c\Rightarrow-\frac{1}{1+\frac{y}{x}}=-\frac{x}{x+y}=\ln|x|+c\Rightarrow x+y=-\frac{x}{\ln|x|+c}\Rightarrow y=-\frac{x}{\ln|x|+c}-x$$

לכן הפתרון הוא $\boxed{y=-\frac{x}{\ln|x|+c}-x}$.

ו. $x^2y'+2xy-y^3=0$

$$x^2y'+2xy-y^3=0\Rightarrow y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^2}\cdot y^3$$

זאת משוואת ברנולי עם $p(x)=\frac{2}{x},q(x)=\frac{1}{x^2},n=3$ (לכן $y=0$ פתרון)

$y=\{e^{-\int(1-n)p(x)dx}\cdot[c+\int(1-n)q(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx]\}^{\frac{1}{1-n}}$ נציב את הנתונים:

$$y=\{e^{-\int-2\cdot\frac{2}{x}dx}\cdot[c+\int-2\cdot\frac{1}{x^2}e^{\int-2\cdot\frac{2}{x}dx}dx]\}^{\frac{1}{-2}}=\{e^{4\ln|x|}\cdot[c-\int\frac{2}{x^2}e^{-4\ln|x|}dx]\}^{\frac{1}{-2}}=$$

$$=\{e^{\ln|x|^4}\cdot[c-\int\frac{2}{x^2}e^{\ln\frac{1}{|x|^4}}dx]\}^{-\frac{1}{2}}=[x^4\cdot(c-\int\frac{2}{x^2}\frac{1}{x^4}dx)]^{-\frac{1}{2}}=[x^4\cdot(c-2\cdot\frac{x^{-5}}{-5})]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{cx^4+\frac{2}{5x}}}$$

הפתרון הוא $\boxed{y=\frac{1}{\sqrt{cx^4+\frac{2}{5x}}}}$ ($y=0$ פתרון רגולרי עבור $c\to\infty$)

ז. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$

$(y+e^y)dy=(x-e^{-x})dx$ נפעיל אינטגרל על שני האגפים: $\int(y+e^y)dy=\int(x-e^{-x})dx$

$$\boxed{\frac{y^2}{2}+e^y=\frac{x^2}{2}+e^{-x}+c}$$

ח. $y'=\cos^2 x\cos^2 2y$

$\frac{dy}{\cos^2 2y}=dx\cos^2 x$ נעשה אינטגרל על שני אגפים $\int\frac{dy}{\cos^2 2y}=\int\cos^2 xdx$

$$\int\cos^2 xdx=\int(\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2})dx=\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{x}{2},\int\frac{dy}{\cos^2 2y}=\frac{\tan 2y}{2}$$

לכן:

$$\frac{\tan 2y}{2}=\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{x}{2}+c\Rightarrow\tan 2y=\sin(2x)+x+c\Rightarrow y=\frac{\arctan(\sin(2x)+x+c)}{2}$$

לכן הפתרון הוא $\boxed{y=\frac{\arctan(\sin(2x)+x+c)}{2}}$.

ט. $(3+y+2y^2\sin^2 x)dx+(x+2xy-y\sin(2x))dy=0$

נראה שהתבנית מדוייקת: כאן

$$p(x,y)=3+y+2y^2\sin^2 x,q(x,y)=x+2xy-y\sin(2x)$$

$$u=\int pdx+\varphi(y)=\int 3+y+2y^2\sin^2 xdx+\varphi(y)=3x+xy+2y^2\int(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)dx+\varphi(y)=$$

$$= 3x + xy + y^2(x - \frac{\sin(2x)}{2} + \varphi(y)) = 3x + xy + xy^2 - \sin(x)\cos(x)y^2 + \varphi(y))$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2xy - 2\sin(x)\cos(x)y + \varphi'(y) = x + 2xy - \sin(2x) + \varphi'(y) = q(x,y)$$

לכן $x + 2xy - \sin(2x) + \varphi'(y) = x + 2xy - \sin(2x)$ לכן $\varphi'(y) = 0$ לכן $\varphi(y) = c$ לכן

$u = 3x + xy + xy^2 - \sin(x)\cos(x)y^2 + c$ והפתרון הוא $u = 0$ לכן

$$3x + xy + xy^2 - \sin(x)\cos(x)y^2 + c = 0 \Rightarrow (x - \sin x\cos x)y^2 + xy + 3x + c = 0$$

מפתרון משוואה ריבועית:

$$\boxed{y_{1,2} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4(x - \sin x\cos x)\cdot(3x + c)}}{2((x - \sin x\cos x))}}$$

י. $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$

$$y' = \frac{y(y^2 + 3x^2)}{2x^3} = \frac{y^3}{2x^3} + \frac{3x^2y}{2x^3} = \frac{1}{2}\cdot(\frac{y}{x})^3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{y}{x}$$

נציב $z = \frac{y}{x}$, $y = zx$ לכן $\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dx}x$ לאחר הצבה נקבל:

$$z + \frac{dz}{dx}x = \frac{1}{2}\cdot z^3 + \frac{3}{2}z \Rightarrow \frac{dz}{dx}x = \frac{1}{2}(z^3 + z) = \frac{1}{2}z(z^2 + 1)$$ לכן

$\frac{2dz}{z(z^2+1)} = \frac{dx}{x}$ נפעיל אינטגרל: $\int\frac{2dz}{z(z^2+1)} = \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

לכן $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{z^2 + 1 - z^2}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}$

$$\int\frac{2dz}{z(z^2+1)} = 2\int\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}dz = 2\ln|z| - \ln|z^2+1| = \ln|\frac{z^2}{z^2+1}| = \ln(\frac{z^2}{z^2+1})$$

נציב בחזרה $z=\frac{y}{x}$ ונקבל

$$\ln\left(\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y^2}{x^2}+1}\right)=\ln|x|+c\Rightarrow\ln\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)=\ln|x|+c\Rightarrow e^{\ln\frac{y^2}{x^2+y^2}}=e^c\cdot e^{\ln|x|}\Rightarrow\frac{y^2}{x^2+y^2}=c|x|$$

$$\Rightarrow y^2=cx(x^2+y^2)=y^2(cx-1)=-cx^3\Rightarrow y^2=\frac{cx^3}{1-cx}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{cx^3}{1-cx}}$$

יא. $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}-1$

נציב $z=x+y$, $y=z-x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$ ונקבל $\frac{dz}{dx}-1=e^z-1$ ולכן:

$\frac{dz}{dx}=e^z\Rightarrow z=e^zx$ נציב בחזרה $x+y=e^{x+y}x$

ולכן הפתרון הוא $\boxed{x+y=e^{x+y}x}$.

2.פתרו את בעיות ההתחלה הבאות. האם יש לכל בעיה פתרון יחיד? אם כן ציינו תחום הגדרה של פתרון יחיד זה.

א. $\begin{cases}(xy+x)dx=(x^2y^2+x^2+y^2+1)dy\\ y(1)=1\end{cases}$

$$(xy+x)dx=(x^2y^2+x^2+y^2+1)dy=(x^2(y^2+1)+y^2+1)dy=(x^2+1)(y^2+1)dy$$

לכן:

$\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{y^2+1}{y+1}dy$ נעשה אינטגרל: $\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int\frac{y^2+1}{y+1}dy$

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\int\frac{y^2+1}{y+1}dy=\int\frac{(y+1)^2-2y}{y+1}dy=\int y+1-\frac{2y+2}{y+1}+\frac{2}{y+1}dy=\int y+1-2+\frac{2}{y+1}dy=$$
$$=\frac{y^2}{2}-y+2\ln|y+1|$$

לכן $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c=\frac{y^2}{2}-y+2\ln|y+1|$ נציב את תנאי ההתחלה:

$$\frac{1}{2}\ln(1+1)+c=\frac{1}{2}-1+2\ln|1+1|\Rightarrow c=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln 2$$

לכן הפתרון הוא $\boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln 2=\frac{y^2}{2}-y+2\ln|y+1|}$

ב. $\begin{cases} y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dy=\arcsin x dx \\ y(0)=0 \end{cases}$

$y^2dy=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ נפעיל אינטגרל $\int y^2dy=\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int y^2dy=\frac{y^3}{3}$$

$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\arcsin x\cdot(\arcsin x)'dx$ נציב $u=\arcsin x$ לכן

לכן: $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int udu=\frac{u^2}{2}=\frac{(\arcsin x)^2}{2}$

$\frac{(\arcsin x)^2}{2}=\frac{y^3}{3}+c$ נציב תנאי התחלה: $\frac{(\arcsin 0)^2}{2}=\frac{0^3}{3}+c\Rightarrow c=0$

לכן הפתרון הוא $\boxed{y=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\arcsin x)^2}}$.

ג. $\begin{cases} y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}, x > 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

מד"ר לינארית מסדר 1, $q(x) = \frac{\cos x}{x^2}, p(x) = \frac{2}{x}$

הפתרון הכללי למדר מהצורה שכזו היא $y = e^{-\int p(x)dx} \cdot [\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c]$. לכן הפתרון הוא

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx} \cdot [\int \frac{\cos x}{x^2} e^{\int \frac{2}{x}dx} dx + c] = e^{-2\ln|x|} \cdot [\int \frac{\cos x}{x^2} e^{2\ln|x|}dx + c] = \frac{1}{x^2} \cdot [\int \frac{\cos x}{x^2} x^2 dx + c] =$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot [\int \cos x dx + c] = \frac{\sin x}{x^2} + \frac{c}{x^2}$$

נציב את תנאי ההתחלה: $0 = \frac{\sin \pi}{\pi^2} + \frac{c}{\pi^2} \Rightarrow c = 0$ לכן הפתרון הוא $\boxed{y = \frac{\sin x}{x^2}}$.

ד. $\begin{cases} (3xy + 3y - 4)dx + (x+1)^2 dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$(3y(x+1) - 4)dx + (x+1)^2 dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(3y(x+1) - 4)}{(x+1)^2} = -\frac{3}{x+1}y + \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{3}{x+1}y = \frac{4}{(x+1)^2}$$

מד"ר לינארית מסדר 1, $q(x) = \frac{4}{(x+1)^2}, p(x) = \frac{3}{x+1}$

הפתרון הכללי למדר מהצורה שכזו היא $y = e^{-\int p(x)dx} \cdot [\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c]$. לכן הפתרון הוא

$$y=e^{-\int\frac{3}{x+1}dx}\cdot[\int\frac{4}{(x+1)^2}e^{\int\frac{3}{x+1}dx}dx+c]=e^{-3\ln|x+1|}\cdot[\int\frac{4}{(x+1)^2}e^{3\ln|x+1|}dx+c]=$$

$$|x+1|^{-3}\cdot[\int\frac{4}{(x+1)^2}|x+1|^3\,dx+c]=\frac{1}{|x+1|^3}\cdot[\int 4|x+1|\,dx+c]=$$

$$\frac{1}{(x+1)^3 sign(x+1)}\cdot[2(x+1)^2 sign(x+1)+c]=\frac{2}{x+1}+\frac{c}{|x+1|^3}$$

נציב את תנאי ההתחלה: $1=\frac{2}{1}+\frac{c}{1^3}\Rightarrow c=-1$ לכן הפתרון הוא: $\boxed{y=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{|x+1|^3}}$.

ה. $\begin{cases} ydx+x(1+x^2y^2)dy=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$ האם משפט היחידות מתקיים כאן?

ו. $\begin{cases} y'=\sqrt[3]{2x-y}+2 \\ y(1)=2 \end{cases}$

נציב $z=2x-y$, $y=2x-z$ לכן $\frac{dy}{dx}=2-\frac{dz}{dx}$ לאחר הצבה נקבל:

$$2-\frac{dz}{dx}=\sqrt[3]{z}+2\Rightarrow\frac{dz}{dx}=-z^{\frac{1}{3}}\Rightarrow z^{-\frac{1}{3}}dz=-dx\Rightarrow\frac{z^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=-x+c\Rightarrow\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}=-x+c$$

נציב בחזרה: $\frac{3}{2}(2x-y)^{\frac{2}{3}}=-x+c$ ונציב את תנאי ההתחלה: $\frac{3}{2}(2\cdot1-2)^{\frac{2}{3}}=-1+c$

לכן $c=1$ והפתרון הוא $\boxed{\frac{3}{2}(2x-y)^{\frac{2}{3}}=-x+1}$.

נשים לב כי יש פתרון סינגולרי: $\boxed{y=2x}$ (כי $y'=2=\sqrt{2x-2x}+2=\sqrt{y-2x}+2$ ומקיים את תנאי ההתחלה). לכן נסיק שמשפט הקיום ויחידות לא מתקיים כאן כי הפתרון לא יחיד).

3. א. $y'=\frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$

$$y'=\frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}=\frac{1}{\frac{x(y+1)}{(1+y)^2}-\frac{x^2}{(1+y)^2}}=\frac{1}{\frac{x}{y+1}-(\frac{x}{y+1})^2}$$

נציב $z=\frac{x}{y+1}$, $y=\frac{x}{z}-1$ לכן $\frac{dy}{dx}=\frac{z-\frac{dz}{dx}x}{z^2}$ לאחר הצבה נקבל:

$$\frac{z-\frac{dz}{dx}x}{z^2}=\frac{1}{z-z^2}\Rightarrow z-\frac{dz}{dx}x=\frac{z}{1-z}\Rightarrow\frac{dz}{dx}x=z-\frac{z}{1-z}=\frac{z-z^2-z}{1-z}=\frac{z^2}{z-1}$$

לכן $\frac{dx}{x}=\frac{z-1}{z^2}dz$ נפעיל אינטגרל לקבל

$$\frac{\ln|z^2|}{2}+\frac{1}{z}=\ln|x|+c\Rightarrow\ln(z^2)+\frac{2}{z}=\ln|x|+c$$

נציב בחזרה את $z=\frac{x}{y+1}$ לקבל: $\ln((\frac{x}{y+1})^2)+\frac{2}{\frac{x}{y+1}}=\ln|x|+c$

לכן הפתרון הוא $\boxed{\ln((\frac{x}{y+1})^2)+2\frac{y+1}{x}=\ln|x|+c}$, יש פתרון סינגולרי עבור $\boxed{y=-1}$

ב. $y'=\frac{y}{3x-y^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3x-y^2}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{3x-y^2}{y}=\frac{3}{y}x-y$ בעצם קיבלנו $x'-\frac{3}{y}x=-y$ וזוהי מד"ר

לינארית מסדר 1(כאשר הפכנו את המשתנה התלוי והבלתי תלוי), $q(y)=-y\,,\,p(y)=-\frac{3}{y}$

הפתרון הכללי למדר מהצורה שכזו היא $x=e^{-\int p(y)dy}\cdot[\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy+c]$. לכן הפתרון הוא

$$x=e^{\int\frac{3}{y}dy}\cdot[\int -ye^{\int-\frac{3}{y}dy}dy+c]=e^{3\ln|y|}\cdot[-\int ye^{-3\ln|y|}dy+c]=|y|^3\cdot[-\int y\frac{1}{|y|^3}dy+c]$$

$$=|y|^3\cdot[sign(y)\int-\frac{1}{y^2}dy+c]=|y|^3\cdot[sign(y)\cdot\frac{1}{y}+c]=y^2+c|y|^3$$

לכן הפתרון הוא $\boxed{x=y^2+c|y|^3}$

ג. $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x+y+1)}{(4x+2y-3)}$$

נציב $z=2x+y$, $y=z-2x$ לכן $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-2$ לאחר הצבה נקבל: $\frac{dz}{dx}-2=\frac{z+1}{2z-3}$

$\frac{dz}{dx}=\frac{z+1}{2z-3}+2=\frac{z+1+4z-6}{2z-3}=\frac{5z-5}{2z-3}$ לכן: $\frac{2z-3}{5(z-1)}dz=dx$ נפעיל אינטגרל:

$\int\frac{2z-3}{5(z-1)}dz=\int dx=x+c$,

$\int\frac{2z-3}{5(z-1)}dz=\frac{1}{5}\int(\frac{2z-2}{z-1}-\frac{1}{z-1})dz=\frac{1}{5}(2z-\ln|z-1|)$, לכן מתקבל:

$\frac{1}{5}(2z-\ln|z-1|)=x+c$ נציב בחזרה $z=2x+y$ לקבל:

$\boxed{\frac{1}{5}(4x+2y-\ln|2x+y-1|)=x+c}$.

ד. $xy^2(xy'+y)=1$

$$xy^2(x\frac{dy}{dx}+y)=1\Rightarrow x^2y^2dy+(xy^3-1)dx=0$$

כאן $p(x,y)=xy^3-1$, $q(x,y)=x^2y^2$ לכן $\frac{\partial q}{\partial x}=2xy^2$, $\frac{\partial p}{\partial y}=3xy^2$,לא מתקיים $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$

אך נשים לב ש $\frac{\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}}{q}=\frac{2xy^2-3xy^2}{x^2y^2}=-\frac{1}{x}$ תלוי רק ב x לכן נגדיר גורם אינטגרציה של

$|x|=e^{\ln|x|}=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}=e^{-\int\frac{\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}}{q}dx}=\mu$ נכפיל את המדר בגורם אינטגרציה(נוריד ערך מוחלט כי זה שקול להכפלת השוואה ב ±1):

$x^3y^2dy+(x^2y^3-x)dx=0$,

כאן $p(x,y)=x^2y^3-x$, $q(x,y)=x^3y^2$ לכן $\frac{\partial q}{\partial x}=3x^2y^2=\frac{\partial p}{\partial y}=3x^2y^2$

לכן ניקח: $u=\int pdx+\varphi(y)=\int x^2y^3-xdx+\varphi(y)=\frac{x^3y^3}{3}-xy+\varphi(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^3y^2+\varphi'(y)$ ואנחנו רוצים שיתקיים $\frac{\partial u}{\partial y}=x^3y^2$ לכן דרוש $\varphi'(y)=0\Rightarrow\varphi(y)=c$.

לכן $u=\frac{x^3y^3}{3}-xy+c$ ו $u=0$ לכן הפתרון הוא $\boxed{\frac{x^3y^3}{3}-xy+c=0}$.

ה. $(6x^2+y^2)dx+y(2x-3y)dy=0$

כאן $p(x,y)=6x^2+y^2$, $q(x,y)=2xy-3y^2$, $\frac{\partial p}{\partial y}=2y=\frac{\partial q}{\partial x}$ לכן ניקח:

$$u=\int pdx+\varphi(y)=\int 6x^2+y^2dx+\varphi(y)=2x^3+xy^2+\varphi(y)$$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy+\varphi'(y)$ ואנחנו רוצים שיתקיים $\frac{\partial u}{\partial y}=2xy-3y^2$ לכן דרוש

$\varphi'(y)=-3y^2\Rightarrow\varphi(y)=-y^3+c$.

ולכן $u=2x+xy-y^3+c$, $u=0$ לכן הפתרון הוא $\boxed{2x+xy-y^3+c=0}$.

ו. $(x^2+3\ln y)ydx=xdy$

$$(x^2+3\ln y)ydx-xdy=0\Rightarrow(x^2+3\ln y)dx-\frac{x}{y}dy=0$$

כאן $p(x,y)=x^2+3\ln y$, $q(x,y)=-\frac{x}{y}$ לכן $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{3}{y},\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{1}{y}$, לא מתקיים $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$

אך נשים לב ש $\frac{\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}}{q}=\frac{-\frac{1}{y}-\frac{3}{y}}{-\frac{x}{y}}=\frac{4}{x}$ תלוי רק ב x לכן נגדיר גורם אינטגרציה של

$\mu=e^{-\int\frac{\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}}{q}dx}=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln|x|}=\frac{1}{x^4}$ נכפיל את המדר בגורם אינטגרציה:

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3\ln y}{x^4}\right)dx-\frac{1}{x^3y}dy=0$$

כאן $p(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{3\ln y}{x^4}$, $q(x,y)=-\frac{1}{x^3y}$ לכן $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{3}{x^4y}=\frac{\partial q}{\partial x}$, לכן ניקח:

$$u=\int pdx+\varphi(y)=\int\frac{1}{x^2}+\frac{3\ln y}{x^4}dx+\varphi(y)=-\frac{1}{x}-\frac{3\ln y}{x^3}+\varphi(y)$$

ולכן $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3}{3x^3 y} + \varphi'(y)$ ואנחנו רוצים שיתקיים $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^3 y}$ לכן דרוש $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$.

ולכן $u = -\frac{1}{x} - \frac{3\ln y}{x^3}$, $u = 0$ לכן הפתרון הוא $-\frac{1}{x} - \frac{3\ln y}{x^3} = 0 \Rightarrow \ln y = \frac{-x^2}{3}$.לכן

$\boxed{y = e^{-\frac{x^2}{3}}}$.

4. א.גוף מסוים בעל טמפרטורה $T_0 = 200^o C$ שמים בסביבה בעלת טמפרטורה שמשתנה עם הזמן לפי החוק הבא: $f(t) = 100 \cdot e^{-\alpha t}$ כאשר $\alpha > 0$ פרטמטר הסביבה. ידוע(חוק של ניטון): קצב השינוי הטמפרטורה של גוף בסביבה הוא פרופורציונאלית להפרש בין הטמפרטורות של הסביבה ושל הגוף.

בהנחה כי מקדם הפרופורציה הוא $k = 2$ מצאו את טמטפרטורת הגוף $T(t)$ לכל $t \geq 0$.

קצב השינוי שווה לנזרת לכן ידוע כי מתקיים: $T' = k(T(t) - f(t))$, עם תנאי התחלה $T(0) = T_0 = 200$, נציב את הנתונים: $\frac{dT}{dt} = 2(100e^{-\alpha t} - T)$ ונפתור:

$$\frac{dT}{dt} + 2T = 200e^{-\alpha t}$$

מד"ר לינארית מסדר 1, $p(t) = 2$, $q(t) = 200e^{-\alpha t}$

הפתרון הכללי למדר מהצורה שכזו היא $T = e^{-\int p(t)dt} \cdot [\int q(t) e^{\int p(t)dt} dt + c]$. לכן הפתרון הוא

$$T = e^{-\int 2dt} \cdot [\int 200e^{-\alpha t} e^{\int 2dt} dt + c] = e^{-2t} \cdot [200\int e^{(2-\alpha)t} dt + c] = e^{-2t} \cdot [200\frac{e^{(2-\alpha)t}}{2-\alpha} + c]$$
$$= \frac{200e^{-\alpha t}}{2-\alpha} + ce^{-2t}$$

נציב את תנאי ההתחלה: $200 = \frac{200e^0}{2-\alpha} + ce^0 \Rightarrow c = 200(1 - \frac{1}{2-\alpha}) = 200\frac{1-\alpha}{2-\alpha}$

לכן המשוואת הטמפרטורה היא:

$$\boxed{T(t)=\frac{200e^{-\alpha t}}{2-\alpha}+200\frac{1-\alpha}{2-\alpha}e^{-2t}=200\frac{e^{-\alpha t}+(1-\alpha)e^{-2t}}{2-\alpha}}$$

ב.כדור עושי ממלח בעל מסה של $M_0=100g=0.1kg$ נופל ממנוחה במים חמים ומאבד כל שניה $1g$ מהמסה שלו. כח ההתנגדות לנפילתו פרופורציונלי למהירות הנפילה עם מקדם הפרופורציה $k=2$ מצאו את מהירות הנפילה ברגע שבו מסת הכדור תהיה מחצית ממסתו ההתחלתית.

פונקציית המסה היא $M(t)=M_0-0.001t=0.1-0.001t$, כח ההתנגדות פרופורציונלי למהירות לכן: $F=kv(t)=2v$ לפי חוקי ניוטון $\sum F=ma$ לכן

$\sum F=M(t)g-2v(t)=M(t)a$, ונזכר שתאוצה היא נגזרת של מהירות:

$M(t)g-2v(t)=M(t)v'(t)$ ולכן המדר הוא: $v'=\frac{dv}{dt}=g-\frac{2v(t)}{M(t)}=g-\frac{2v}{0.1-0.001t}$

נפתור אותו(התנאי ההתחלתי הוא $v(0)=0$ כיוון שנפל ממנוחה):

$v'+\frac{2}{0.1-0.001t}v=g$ מד"ר לינארית מסדר 1, $q(t)=g\,,\,p(t)=\frac{2}{0.1-0.001t}$

הפתרון הכללי למדר מהצורה שכזו היא $v=e^{-\int p(t)dt}\cdot[\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt+c]$. לכן הפתרון הוא

$$v=e^{-\int\frac{2}{0.1-0.001t}dt}\cdot[\int ge^{\int\frac{2}{0.1-0.001t}dt}dt+c]=e^{\frac{2\ln|0.1-0.001t|}{0.001}}\cdot[g\int e^{-\frac{2\ln|0.1-0.001t|}{0.001}}dt+c]=$$

$$=(0.1-0.001t)^{2000}\cdot[g\int(0.1-0.001t)^{-2000}dt+c]=$$

$$=(0.1-0.001t)^{2000}\cdot[g\cdot\frac{(0.1-0.001t)^{-1999}}{1999\cdot-0.001}+c]=$$

$$=(0.1-0.001t)^{2000}\cdot[g\frac{1000}{1999}(0.1-0.001t)^{-1999}+c]=g\frac{1000}{1999}(0.1-0.001t)+c(0.1-0.001t)^{2000}$$

נציב תנאי התחלה: $0=g\cdot\frac{1000}{1999}(0.1)+c\cdot0.1^{2000}\Rightarrow c=-g\frac{100}{1999}\cdot0.1^{-2000}$ לכן

$$v(t)=g\frac{1000}{1999}(0.1-0.001t)-g\frac{100}{1999}\cdot0.1^{-2000}(0.1-0.001t)^{2000}$$

הזמן שבו מסת הכדור תהיה חצי היא $t = 50\sec$ לכן

$$v(50) = g\frac{1000}{1999}(0.05) - g\frac{100}{1999}0.1^{-2000}\cdot 0.05^{2000} = g\frac{50}{1999} - g\frac{100}{1999}\cdot 0.05^{2000}$$

$$\approx 9.8\frac{50}{1999} = 0.245m/\sec$$

לכן המהירות כאשר מסת הכדור היא חצי מהמקורית היא $\boxed{v_{half} = 0.245m/\sec}$.

5.א. $(2x + y\cos(xy))dx + x\cos(xy)dy = 0$

כאן $p(x,y) = 2x + y\cos(xy)$, $q(x,y) = x\cos(xy)$,

$\frac{\partial q}{\partial x} = \cos(xy) - xy\sin(xy) = \frac{\partial p}{\partial y}$ לכן זוהי מד"ר מדוייקת ונמצא את u:

$$u = \int pdx + \varphi(y) = \int 2x + y\cos(xy)dx + \varphi(y) = x^2 + \sin(xy) + \varphi(y)$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(xy) + \varphi'(y)$ ונדרוש $\frac{\partial u}{\partial y} = q$ לכן $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$ לכן

$u = x^2 + \sin(xy) + c = 0$ לכן הפתרון הוא $\boxed{x^2 + \sin(xy) + c = 0}$.

ב. $v(2uv^2 - 3)du + (3u^2v^2 - 3u + 4v)dv = 0$

$p(u,v) = 2uv^3 - 3v$, $q(u,v) = 3u^2v^2 - 3u + 4v$

$\frac{\partial q}{\partial u} = 6uv^2 - 3 = \frac{\partial p}{\partial v}$ לכן המד"ר מדוייקת ולכן ניקח

$$u* = \int pdu + \varphi(v) = \int(2uv^3 - 3v)du + \varphi(v) = u^2v^3 - 3uv + \varphi(v)$$

$$\frac{\partial u*}{\partial v} = 3u^2v^2 - 3u + \varphi'(v) = q \Rightarrow \varphi'(v) = 4v \Rightarrow \varphi(v) = 2v^2 + c$$

לכן $u* = u^2v^3 - 3uv + 2v^2 + c = 0$ לכן הפתרון הוא $\boxed{u^2v^3 - 3uv + 2v^2 + c = 0}$.

ג. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$ בהינתן $y_1(x) = \sin x$ פתרון פרטי שלה.

נציב $y = y_0 + z$ לכן $\frac{dy}{dx} = \sin x + \frac{dz}{dx}$ לכן:

$$\cos x + \frac{dz}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + (z + \sin x)^2}{2\cos x} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + z^2 + 2z\sin x + \sin^2 x - 2\cos^2 x}{2\cos x} = \frac{z^2 + 2z\sin x}{2\cos x}$$

זאת משוואת ברנולי: $z' - \tan xz = \frac{z^2}{2\cos x}$

$$y(x) = \sqrt[1-n]{e^{-\int(1-n)p(x)dx}\int(1-n)q(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx} \quad ,$$

נציב $n = 2$, $p(x) = -\tan x$, $q(x) = \frac{1}{2\cos x}$

$$y(x) = \sqrt[1-2]{e^{-\int(1-2)-\tan x dx}[c + \int(1-2)\frac{1}{2\cos x}e^{\int(1-2)-\tan x dx}dx]} =$$

$$= \sqrt[-1]{e^{-\int \tan x dx}[c + \int -\frac{1}{2\cos x}e^{\int(\tan x dx}dx]} = \frac{1}{e^{\ln|\cos x|}[c + \int -\frac{1}{2\cos x}e^{-\ln|\cos x|}dx]} =$$

$$= \frac{1}{|\cos x|[c + \int -\frac{1}{2\cos x}\frac{1}{|\cos x|}dx]} = \frac{1}{-\cos x[c + \int \frac{1}{2\cos^2 x}dx]} = \frac{1}{-\cos x[c + \frac{1}{2}\tan x]} =$$

$$= \frac{2}{c\cos x - \sin x}$$

לכן הפתרון הוא $\boxed{\frac{2}{c\cos x - \sin x}}$.

ד. $(3x^2 y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

$p(x,y)=3x^2y+2xy+y^3$, $q(x,y)=x^2+y^2$ לכן $\frac{\partial p}{\partial y}=3x^2+2x+3y^2$ $\frac{\partial q}{\partial x}=2x$

לכן הדבר לא מדוייקת אך נשים לב $-3=\frac{-3x^2-3y^2}{x^2+y^2}=\frac{\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}}{q}$ תתוי ב x בלבד לכן ניקח,

גורם אינטרגרציה של $\mu=e^{-\int -3dx}=e^{3x}$ נכפיל לקבל

$e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)dx+e^{3x}(x^2+y^2)dy=0$ כעת זו מד"ר מדוייקת לכן ניקח

$$u=\int qdy+\varphi(x)=\int(e^{3x}x^2+e^{3x}y^2)dy+\varphi(x)=e^{3x}x^2y+\frac{e^{3x}y^3}{3}+\varphi(x)$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=3e^{3x}x^2y+2xe^{3x}y+e^{3x}y^3+\varphi'(x)=p$ לכן $\varphi'(x)=0\Rightarrow\varphi(x)=c$

לכן $u=e^{3x}x^2y+\frac{e^{3x}y^3}{3}+c=0$ והפתרון הוא $\boxed{e^{3x}x^2y+\frac{e^{3x}y^3}{3}+c=0}$.

ה. $(3x+\frac{6}{y})dx+(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})dy=0$

נכפיל ב xy את שני האגפים: $(3x^2y+6x)dx+(x^3+3y^2)dy=0$

כאן $p(x,y)=3x^2y+6x$, $q(x,y)=x^3+3y^2$ לכן $\frac{\partial p}{\partial y}=3x^2=\frac{\partial q}{\partial x}$ והמדר מדוייקת,

ניקח $u=\int pdx+\varphi(y)=\int(3x^2y+6x)dx+\varphi(y)=x^3y+3x^2+\varphi(y)$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^3+\varphi'(y)=q(x,y)$ לכן $\varphi'(y)=3y^2\Rightarrow\varphi(y)=y^3+c$ לכן

$u=x^3y+3x^2+y^3+c=0$ לכן הפתרון הוא $\boxed{x^3y+3x^2+y^3+c=0}$.

ו. $y(8x-9y)dx+2x(x-3y)dy=0$ בשתי דרכים:

דרך א:

$p(x,y)=8xy-9y^2$, $q(x,y)=2x^2-6xy$ לכן $\frac{\partial q}{\partial x}=4x-6y$, $\frac{\partial p}{\partial y}=8x-18y$

המד"ר לא מדוייקת לכן ניקח גורם אינטגרציה $\mu = e^{-\int \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{q} dx}$

לכן $\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{q} = \frac{4x - 6y - (8x - 18y)}{2x^2 - 6xy} = \frac{-4x + 12y}{2x(x-3y)} = \frac{-4(x-3y)}{2x(x-3y)} = \frac{-2}{x}$

$\mu = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$ נכפיל את המד"ר בגורם:

$(8x^3y - 9x^2y^2)dx + (2x^4 - 6x^3y)dy = 0$ וכעת המד"ר מדוייקת לכן ניקח:

$$u = \int (8x^3y - 9x^2y^2)dx + \varphi(y) = 2x^4y - 3x^3y^2 + \varphi(y)$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^4 - 6x^3y + \varphi'(y) = 2x^4 - 6x^3y$ לכן $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$ לכן נקבל

$u = 2x^4y - 3x^3y^2 + c = 0$ לכן הפתרון הוא $\boxed{2x^4y - 3x^3y^2 + c = 0}$.

דרך ב:

$y(8x - 9y)dx + 2x(x-3y)dy = 0$ נחלק ב xy:

$$(8 - 9\frac{y}{x})dx + (\frac{2x}{y} - 6)dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{9\frac{y}{x} - 8}{2\frac{x}{y} - 6}$$

נציב $z = \frac{y}{x}$, לכן $y = zx$ לכן $\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dx}x$

$$z + \frac{dz}{dx}x = \frac{9z - 8}{\frac{2}{z} - 6} = \frac{9z^2 - 8z}{2 - 6z} \Rightarrow \frac{dz}{dx}x = \frac{9z^2 - 8z}{2 - 6z} - z = \frac{9z^2 - 8z - 2z + 6z^2}{2 - 6z} = \frac{5z(3z-2)}{2 - 6z}$$

לכן $\frac{(2-6z)dz}{5z(3z-2)} = \frac{dx}{x}$ נפעיל אינטגרל: $\int \frac{(2-6z)dz}{5z(3z-2)} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$,

$$\int\frac{(2-6z)dz}{5z(3z-2)}=\frac{2}{5}\int\frac{1-3z}{z(3z-2)}dz=\frac{2}{5}\int\frac{1}{z(3z-2)}-\frac{3z}{z(3z-2)}dz=\frac{2}{5}\int\frac{2-3z+3z}{z(3z-2)}-\frac{3}{(3z-2)}dz=$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{2-3z+3z}{2z(3z-2)}-\frac{3}{(3z-2)}dz=\frac{2}{5}\int-\frac{1}{2z}+\frac{3}{2(3z-2)}-\frac{3}{(3z-2)}dz=\frac{2}{5}\int-\frac{1}{2z}-\frac{3}{2(3z-2)}dz=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{z}+\frac{3}{(3z-2)}dz=-\frac{1}{5}\ln|z|-\frac{1}{5}\cdot\frac{3\cdot\ln|3z-2|}{3}=-\frac{1}{5}(\ln|z|-\ln|3z-2|)$$

$$-\frac{1}{5}(\ln|z|-\ln|3z-2|)=\ln|x|+c$$

נציב בחזרה $z=\frac{y}{x}$:הפתרון הוא $\boxed{-\frac{1}{5}(\ln|\frac{y}{x}|-\ln|\frac{3y}{x}-2|)=\ln|x|+c}$.

ז. $y'=2(\frac{y+2}{x+y-1})^2$

יש לנו כאן מקרה של $y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ כאשר $f(z)=2z^2$, $a_1=0,b_1=1,c_1=2$ ו

$a_2=1,b_2=1,c_2=-1$ נחשב את $\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$: $\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=0-1=-1\neq 0$

לכן נגדיר $x=p+\alpha, y=q+\beta$:

$$a_1x+b_1y+c_1=a_1p+b_1q+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2=a_2p+b_2q+(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)$$

נרצה ש $\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0\\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0\end{cases}$ כלומר $\begin{cases}\beta+2=0\\ \alpha+\beta-1=0\end{cases}$ מהמשוואה הראשונה נקבל $\beta=-2$ לכן

$\alpha=3$, לכן ההצבה היא $x=p+3, y=q-2$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dq}{dp}=f(\frac{a_1p+b_1q}{a_2p+b_2q})=f(\frac{q}{p+q})=f(\frac{\frac{q}{p}}{1+\frac{q}{p}})$ נציב $z=\frac{q}{p}$ לכן

$q=zp\Rightarrow\frac{dq}{dp}=z+\frac{dz}{dp}p$: $z+\frac{dz}{dp}p=f(\frac{z}{1+z})=2(\frac{z}{z+1})^2=\frac{2z^2}{z^2+2z+1}$

לכן: $-\frac{z(z^2+1)}{(z+1)^2} = \frac{-z^3-z}{(z+1)^2} = z - \frac{2z^2}{z^2+2z+1} = p\frac{dz}{dp}$ לכן $\frac{z^2+2z+1}{z^3+z}dz = -\frac{dp}{p}$

נפעיל אינטגרל: $\int\frac{z^2+2z+1}{z^3+z}dz = \int -\frac{dp}{p} = -\ln|p|+c$,

$$\int\frac{z^2+2z+1}{z^3+z}dz = \int\frac{z^2+1}{z(z^2+1)} + \frac{2z}{z(z^2+1)}dz = \int\frac{1}{z} + \frac{2}{(z^2+1)}dz = \ln|z| + 2\arctan(z)$$

לכן $\ln|z|+2\arctan(z) = -\ln|p|+c$ נציב $z = \frac{q}{p} = \frac{y+2}{x-3}, p = x-3$:

הפתרון הוא $\ln|\frac{y+2}{x-3}| + 2\arctan(\frac{y+2}{x-3}) + \ln|x-3| + c = 0$ נצמצם לפי חוקי לוגריתמים:

הפתרון הוא $\boxed{\ln|y+2| + 2\arctan(\frac{y+2}{x-3}) + c = 0}$.

6.א. $(x^2+y^2+x)dx + ydy = 0$

כפי שמבוקש נציב $z = x^2+y^2$ לכן

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = 2xdx + \frac{\partial(y^2)}{\partial x} = 2x + \frac{\partial y^2}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + 2y\cdot y' = 2x + \frac{2y\cdot dy}{dx}$$

נכפיל ב dx לקבל $dz = 2xdx + 2ydy$

כאשר מציבים במד"ר מקבלים: $zdx + xdx + ydx = 0$ כפי שראינו קודם $xdx + ydy = \frac{dz}{2}$ לכן:

$zdx + \frac{dz}{2} = 0 \Rightarrow 2zdx + dz = 0$ כאן דרוש למצוא גורם אינטגרציה $\mu(x^2+y^2) = \mu(z)$,

במד"ר הנ"ל $p(x,z) = 2z$, $q(x,z) = 1$, $\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}}{p} = \frac{0-2}{2z} = -\frac{1}{z}$ פונקציה של z בלבד

לכן ניקח גורם אינטגרציה $\mu(z) = e^{\int -\frac{1}{z}dz} = e^{-\ln|z|} = \frac{1}{z}$ נכפיל בגורם אינטגרציה: $2dx + \frac{1}{z}dz = 0$

זאת מד"ר מדוייקת לכן ניקח $u=\int 2dx+\varphi(z)=2x+\varphi(z)$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=\varphi'(z)=\frac{1}{z}\Rightarrow \varphi(z)=\ln|z|+c=\ln z+c$ לכן $2x+\ln z+c=0$ נציב בחזרה:

$2x+\ln(x^2+y^2)+c=0\Rightarrow x^2+y^2=e^{-2x-c}\Rightarrow y^2=ce^{-2x}-x^2$ לכן הפתרון הוא:

$\boxed{y=\pm\sqrt{ce^{-2x}-x^2}}$.

ב. $\begin{cases}(x^2+y^2+x)dx+ydy=0\\ y(0)=1\end{cases}$

$p(x,y)=x^2+y^2+x, q(x,y)=y$ לכן, $\frac{\partial p}{\partial y}=2y, \frac{\partial q}{\partial x}=0$ לא מדוייקת, ניקח גורם

אינטגרציה: $\mu=e^{-\int\frac{\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}}{q}dx}=e^{--2x}=e^{2x}$ נכפיל בגורם אינטגרציה:

$e^{2x}(x^2+y^2+x)dx+e^{2x}ydy=0$ מדוייקת לכן ניקח :

$u=\int e^{2x}ydy+\varphi(x)=\frac{e^{2x}y^2}{2}+\varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{2x}y^2+\varphi'(x)=e^{2x}(x^2+y^2+x)$ לכן

$\varphi'(x)=e^{2x}x^2+e^{2x}x$ מאינטגרציה בחלקים פעמיים מקבלים:

$\varphi(x)=\frac{e^{2x}}{4}(2x^2-2x+1)+\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+c=\frac{e^{2x}2x^2}{4}+c=\frac{e^{2x}x^2}{2}+c$.

לכן $u=\frac{e^{2x}(x^2+y^2)}{2}+c=0$ לכן הפתרון הוא $e^{2x}(x^2+y^2)+c=0$ נציב תנאי התחלה:

$e^0\cdot(0+1)+c=0\Rightarrow c=-1$ לכן נבודד את לכן נבודד את y :

$y^2=\frac{1-e^{2x}x^2}{e^{2x}}=\frac{1}{e^{2x}}-x^2$ לכן הפתרון הוא $\boxed{y=\sqrt{\frac{1}{e^{2x}}-x^2}}$ (לא יתכן מינוס בשל תנאי ההתחלה).

7. $\begin{cases}(1+y^2+xy^2)dx+(x^2y+y+2xy)dy=0\\ y(0)=1\end{cases}$

א. אפשר להגיע מהמד"ר למצב של $y'=f(x,y)=-\dfrac{1+y^2+xy^2}{x^2y+y+2xy}$ כאן f לא מקיימת את תנאי תנאי ליפשיץ לכן משפט הקיום והיחידות לא מתקיימים(ואכן נראה זאת בסעיף ב').

ב. כאן $p(x,y)=1+y^2+xy^2$, $q(x,y)=x^2y+y+2xy$,לכן $\dfrac{\partial q}{\partial x}=2y+2xy=\dfrac{\partial p}{\partial y}$

לכן המד"ר מדוייקת וניקח

$$u=\int pdx+\varphi(y)=\int(1+y^2+xy^2)dx+\varphi(y)=x+xy^2+\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y)$$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy+x^2y+\varphi'(y)=q(x,y)$ לכן $\varphi'(y)=y\Rightarrow\varphi(y)=\dfrac{y^2}{2}+c$ לכן

$u=x+xy^2+\dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+c=0$ נציב תנאי התחלה:

$1+1\cdot 0^2+0+0+c=0\Rightarrow c=-1$ לכן הפתרון הוא $x+xy^2+\dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}-1=0$ נבודד

את y: $y^2(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2})=1-x$ לכן הפתרון הוא $\boxed{y=\pm\sqrt{\dfrac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}{1-x}}}$.

ג. התשובה שקיבלנו מצדעקה את התשובה ב א כי בתשובה אנו רואים שאין יחידות בפתרון.