

תרגיל בית מספר 7

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדב

1. הוכיחו או הפריכו:

(א) $|\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}_{11}\}| = |\mathbb{Z}_{11}|$

(ב) $|\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}| = |\mathbb{Z}|$

- (ג) אם $|A| = |B|$ וגם $f: A \rightarrow B$ חח"ע אזי f על.
 (ד) אם $|A| = |B| = n \in \mathbb{N}$ וגם $f: A \rightarrow B$ חח"ע אזי f על.

פיתרון:

(א) לא נכון. $|\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}_{11}\}| = 6 \neq 11 = |\mathbb{Z}_{11}|$

(ב) נכון. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \cup \{0\}| = |\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}|$
 $|\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}|$

(ג) לא נכון. למשל $n^2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חח"ע ולא על.

(ד) נכון. אם f אינה על, אז $|\text{image}(f)| < |B| = |A| = n \in \mathbb{N}$, לכן f אינה חח"ע, לפי עקרון שובר היונים.

2. הוכיחו: קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים אינה בת מניה.

פיתרון:

אם $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ היתה בת מניה, אז $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})| = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

3. עיגול במישור $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ מוגדר להיות הקבוצה $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$

עבור נקודה $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ורדיוס $r \in \mathbb{R}^+$ (כאשר $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$).

הוכיחו: מספר העיגולים הזרים שאפשר לצייר במישור הוא בן מניה.

פיתרון:

לכל עיגול יש נציג יחודי מ- $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (כי הרציונאליים קבוצה צפופה בממשיים והעיגולים זרים), לכן אפשר לשכן כל קבוצת עיגולים זרים ב- $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

4. נתונה $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הפיכה. נגדיר $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$. הוכיחו שהקבוצה $A \times A \times A$ היא בת מניה על-ידי הגדרת פונקציה חח"ע ועל לתוך \mathbb{N} .

פיתרון:

נשים לב ש- $t(n) = n + 1$ פונקציה חח"ע ועל מ- A ל- \mathbb{N} ו- $t^{-1}(n) = n - 1$ ההופכית שלה.

נגדיר $g(a, b) = f(t(a), t(b))$, זו פונקציה חח"ע ועל מ- $A \times A$ ל- \mathbb{N} (הרכבה של הפיכות).

ו- $h(a, b, c) = g(t^{-1}(g(a, b)), c)$ חח"ע ועל מ- $A \times A \times A$ ל- \mathbb{N} (הרכבה של הפיכות).

5. נתבונן ב- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, עבור $i, j \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_{ij} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(i) = j\} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$$(א) \text{ הוכיחו: } \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \emptyset$$

פיתרון:

נביט בקבוצה $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}$ עבור i קבוע.

לכל $j_1 \neq j_2$ הקבוצה $A_{ij_1} \cap A_{ij_2} = \emptyset$ כי אלה קבוצות של פונקציות עם ערך קבוע שונה ב- i .

כלומר, לכל $f \in A_{ij_1}$ ו- $g \in A_{ij_2}$, $f(i) = j_1 \neq j_2 = g(i)$.

הקבוצות זרות בזוגות ולכן גם החיתוך הכולל שלהם ריק $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} = \emptyset$.

$$\text{סה"כ: } \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\emptyset) = \emptyset$$

$$(ב) \text{ הוכיחו: } \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij} \right) \neq \emptyset$$

פיתרון:

נראה שפונקציות הזהות $id(i) = i$ נמצאת בחיתוך $\bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij} \right)$.

כדי להבין את מה שנמצא בחיתוך, נביט בקבוצה $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}$ עבור j קבוע.

זו קבוצת הפונקציות המקבלות את הערך j לפחות פעם אחת

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists i (f(i) = j)\}$$

הפונקציות המקבלות גם את j_1 וגם את j_2 לפחות פעם אחת.

החיתוך הכולל הוא הפונקציות המקבלות כל ערך ב- \mathbb{N} לפחות פעם אחת.

וחזרה לפונקציית הזהות: $id \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}$ כי $id \in A_{jj}$ לכל j , ולכן נמצאת בחיתוך הכולל.

ג) הוכיחו שלכל קבוצה $H \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה, מתקיים: $\cdot \bigcap_{h \in H} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right) \neq \emptyset$

פיתרון:

נניח בשלילה ש- $\cdot \bigcap_{h \in H} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right) = \emptyset$ בת מנייה כך ש-

H בת מנייה, נסדר את איבריה: $H = \{h_1, h_2, \dots\}$ ו- $\cdot \bigcap_{h \in H} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih_j(i)} \right)$

(נשים לב שבסעיף הקודם H היא קבוצת הפונקציות הקבועות $(h_j(i) = j)$.)

נגדיר: $f(i) = h_i(i)$. נראה ש- f נמצאת בחיתוך בסתירה להנחה.

נשים לב ש- f מזדהה עם כל פונקציה $h_j \in H$ לפחות במקום אחד כי $f(j) = h_j(j)$.

בדומה לסעיף הקודם, עבור $h_j \in H$, האיחוד $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih_j(i)}$ הוא קבוצת הפונקציות המזדהות עם h_j

לפחות במקום אחד $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih_j(i)} = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists i (g(i) = h_j(i))\}$ והחיתוך של קבוצות אלה הוא

קבוצת הפונקציות המזדהות עם כל פונקציה ב- H לפחות במקום אחד (כמו f שהגדרנו).

לכל h_j , הפונקציה $f(i) = h_i(i)$ נמצאת באיחוד $\left(f \in A_{jh_j(j)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih_j(i)} \right)$.

ד) הסיקו שלא קיימת $H \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה כך ש- $\cdot \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \bigcap_{h \in H} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right)$

פיתרון:

לפי סעיף א' $\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \emptyset$ ולפי סעיף ג', לכל קבוצה $H \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה

$$\cdot \bigcap_{h \in H} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right) \neq \emptyset$$

ה) הוכיחו שכאשר $H = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ מתקיים: $\cdot \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right)$

פיתרון:

ללא האילוץ ש- H בת מנייה, אסטרטגיית הבנייה של f מסעיף ג' לא נכונה. השאלה הבאה (6)

מוכיחה זאת באופן כללי.

בסעיף זה אפשר לראות שצד ימין ריק, כי לכל פונקציה $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ אפשר לבנות פונקציה שונה ממנה

נקודתית $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, כלומר, $\forall i (h(i) \neq f(i))$ ו- $f \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)}$

6. שאלת אתגר

הוכיחו: אם A_{ij} קבוצות כלשהן, עבור $i, j \in \mathbb{N}$, אז: $\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right)$

פיתרון:

$$L = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right) = R$$

$f \notin L$ \Downarrow $\forall i (\exists j_i (f \notin A_{j_i}))$ define: $h(i) = j_i$ \Downarrow $\forall i (f \notin A_{ih(i)})$ \Downarrow $\exists h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \left(f \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)} \right)$ \Downarrow $f \notin R$
--

$f \in L$ \Downarrow $\exists i (\forall j (f \in A_{ij}))$ \Downarrow $\forall h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\exists i (f \in A_{ih(i)}))$ \Downarrow $f \in R$

בהצלחה!