תרגיל 4

1. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in N$ מתקיים:

(א)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

(ב)

$$\frac{1}{2n}\leq\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

2.

הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{4} \\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot a_n^2 \end{cases}$$

(א) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, $0<a_n<1$.

(ב) הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת.

(ג) הסיקו ש-$\{a_n\}$ מתכנסת ומצאו את גבולה.

3.

הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י

$$\begin{cases} a_1=0 \\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

(א) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, $0\leq a_n<2$.

(ב) הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית עולה.

(ג) הסיקו ש-$\{a_n\}$ מתכנסת ומצאו את גבולה.

.4

חשבו את הגבולות הבאים:

א) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n+1}$$

ב) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$$

ג) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7+3n}{9+3n}\right)^{n}$$

ד) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}$$