

מבחן מועד ב' – חדו"א 2 לאודיסאה- 86-148 – 24/08/23

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

1. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל- $f(x)$.

ב. חשבו את $f^{(38)}(0)$.

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$

א. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $(-1, 1]$.

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $[0, 1]$.

3. תהי $u(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית, ותהי $f(x)$ פונקציה גזירה.

$$h(x, y) = u(x, y) + u(2y, 3x)$$

$$g(x) = u(u(x, x), e^x)$$

א. הביעו את $h_x(x, y)$ באמצעות f, f', u_x, u_y .

ב. הביעו את $g'(x)$ באמצעות f, f', u_x, u_y .

4. נביט בפונקציה $f(x, y) = x - 2y$

א. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x, y)$ בתחום $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

ב. מצאו פונקציה $g(x, y)$ כך שהמישור $z = f(x, y)$ הוא המישור המשיק ל- $g(x, y)$ בנקודה $(1, 1)$.

5. רמי הכין עוגה שהתחתית שלה היא התחום $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ וגובהה הוא $f(x, y) = x + y + \sqrt{2}$.

מצאו את שטח הפנים הכולל של העוגה של רמי (תחתית, קירות ותקרת העוגה).

6. נביט בתחום חצי מעגל היחידה במישור $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$,

נביט במסילה שהפרמטריזציה שלה היא

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

$$t \in [0, \pi]$$

ונביט בשדה הוקטורי

$$\vec{F} = (e^x y) \hat{i} + (x + e^x) \hat{j}$$

חשבו את האינטגרל הקווי מסוג שני של השדה הוקטורי על המסילה C :

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

אינטגרלים במישור ובמרחב

אינטגרלים כפולים

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על D כרצפה, ועל f כגובה התקרה, והאינטגרל $\iint_D f dx dy$ מייצג את נפח הבית.

כמו כן, אפשר לחשוב על D כמשטח, ועל f כצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של המשטח.

בנוסף, $\iint_D 1 dx dy$ הוא השטח של התחום D .

חישוב אינטגרלים כפולים

אם

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

אזי

$$\iint_D f dx dy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

שינוי קואורדינטות על אינטגרלים כפולים

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y) \in D \quad (u, v) \in D'$$

אזי

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| du dv$$

קואורדינטות קוטביות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$(x, y) \in D \quad (r, \theta) \in D'$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

אינטגרלים משולשים

יהי תחום $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על V כאובייקט תלת מימדי, ועל f כצפיפות בכל נקודה, והאינטגרל $\iiint_V f dx dy dz$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iiint_V 1 dx dy dz$ הוא הנפח של התחום V .

אם

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

וכן

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

אזי

$$\iiint_V f dx dy dz = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

שינוי קואורדינטות

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y, z) \in V \quad (u, v, w) \in V'$$

אזי

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

קואורדינטות גליליות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, z) \in V'$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \cdot r dr d\theta dz$$

קואורדינטות כדוריות

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, \phi) \in V'$$

$$\iiint_V f dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור שפה על הרצפה, ועל f כגובה הקירות, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את שטח הקירות.

כמו כן, אפשר לחשוב על C בתור חבל על הרצפה, ועל f כצפיפות החבל בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, $\int_C 1 dr$ הוא אורך המסילה.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה C

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

אינטרגלים קוויים מסוג ראשון במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור חבל במרחב ועל f בתור הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, האינטגרל $\int_C 1 dr$ הוא האורך של המסילה.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במרחב

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול על הרצפה, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, ואז $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה שנעשית על

חלקיק שנע לאורך המסלול.

תהי פרמטריזציה של C

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול במרחב, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, אז האינטגרל $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה הנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי פרמטריזציה של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

סימון נוסף לאינטגרלים קוויים מסוג שני

$$\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$$

והפרמטריזציה של המסילה היא

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

אזי נסמן

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$$

כאשר

$$\int_C P dx = \int_a^b P(\vec{r}(t)) \cdot x'(t) dt$$

$$\int_C Q dy = \int_a^b Q(\vec{r}(t)) \cdot y'(t) dt$$

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ בעל השפה C ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ בעל נגזרות רציפות
אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של $\vec{F}$ מסביב ל- C נגד כיוון השעון שווה לאינטגרל הכפול של $\text{curl}(\vec{F})$ על התחום D .

נסמן

$$\vec{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

אזי

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{curl}(\vec{F}) dx dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
אפשר לחשוב על M כאובייקט משטחי ועל f כפונקציית הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\iint_M f dS$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iint_M 1 dS$ מייצג את שטח הפנים של המשטח.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M f dS = \iint_D f(\vec{s}(u, v)) \cdot |\vec{s}_u \times \vec{s}_v| du dv$$

אינטגרלים משטחיים מסוג שני

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ויהי כיוון לנורמל למשטח.
אפשר לחשוב על המשטח בתור ממברנה ועל השדה הוקטורי בתור עוצמת הזרימה, אז האינטגרל $\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ הוא סך כל הזרימה דרך הממברנה בכיוון הנורמל הנתון.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}(\vec{s}(u, v)) \cdot (\vec{s}_u \times \vec{s}_v) du dv$$

כאשר הסימן נקבע על ידי בחירת וקטור הנורמל $\vec{s}_u \times \vec{s}_v$ בכיוון הנתון.

משפט גאוס (דיברגנץ)

יהי גוף תלת מימדי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל משטח מעטפת M ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, ונביט בנורמל כלפי חוץ הגוף, אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz$$

משפט סטוקס

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל שפה C ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, אזי האינטגרל הקווי נגד כיוון השעון כאשר הלמעלה הוא לפי הנורמל למשטח מקיים:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$