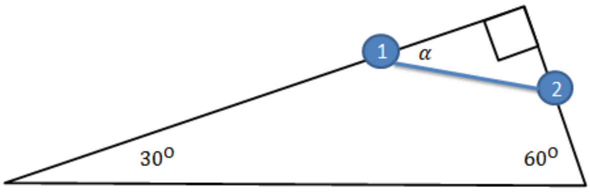
שיעור חזרה במכניקה \2013 – נתי

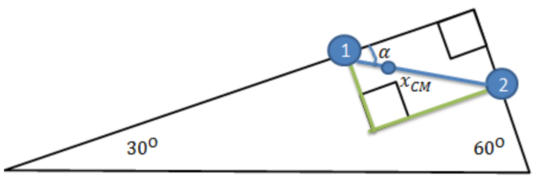
נפתור מבחן, שאלה בקפלר, ושאלה מגניבה שנתי מצא.



שאלה 1# : נתונים שתי חרוזים המחוברים ע"י מוט והם על מסילה הנתונה בשמאל.

המסות הן $m_1 = 100kg, m_2 = 300kg$. צריך למצוא את הזווית שנוצרה.

פתרון :

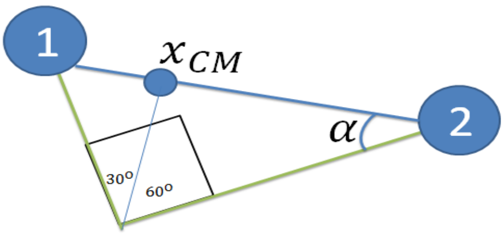


צריך לבחור נקודה נבונה ולהשתמש בה בהתאם ע"פ הטורקים וכו'. נסמן את מרכז המסה, וחישוב פשוט יראה ש$\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

איך נבחר את הנקודה? נסמן שתי אנכים! ונבחר את נקודת המפגש שלהם. נוכיח שmgע עובר דרך הנקודה הזו.

מתקיים כי סכום הטורקים שווה ל0. ידוע כי סכום הטורקים בכל נקודה ונקודה במערכת מתאפס, ולכן בהכרח שזה גם מתקיים עבור הנקודה הזו ספציפית. לכן, מדובר שם בסכום של שתי אפסים (הטורקים של הנורמל) פלוס הטורק של mg וסכומם שווה לאפס. לכן בהכרח שהטורק של mg שווה אפס. איך זה קורה? או כשהזווית בינהם אפס, או כשהמרחק הוא אפס. ברור שאפשר לבחור מרחק שיהיה שונה מאפס, ולכן בהכרח שהם באותו כיוון, מ.ש.ל.

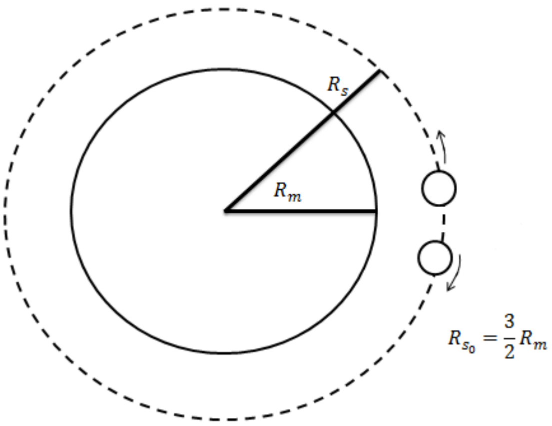
מכאן הפתרון כמעט טריוויאלי. נראה זאת :



מתקבל המשולש שמשמאל . נסמן את הישר המחבר את הנקודה עם מרכז המסה בy, ונרשום את משפט הסינוסים לכל אחד מהמשולשים הקטנים. $\frac{x_2}{sin60} = \frac{y}{sina}$, ו$\frac{x_1}{sin30} = \frac{y}{cosa}$

מתקבל $\cdots = \frac{sin60}{sin30}\frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{ysin60}{x_2}}{\frac{ysin30}{x_1}} = \frac{sina}{cosa} = tana$ והשאר הוא חישוב פשוט.

שאלה 2# : מהמבחן של הנדסה במכניקה לשנת תשע"ג.



ירח וסביבו לווין ורובוט, ברדיוס התחלתי נתון, הלווין בכיוון מנוגד לרובוט, אך באותה מהירות. (ברור שיתנגשו מתישהו)

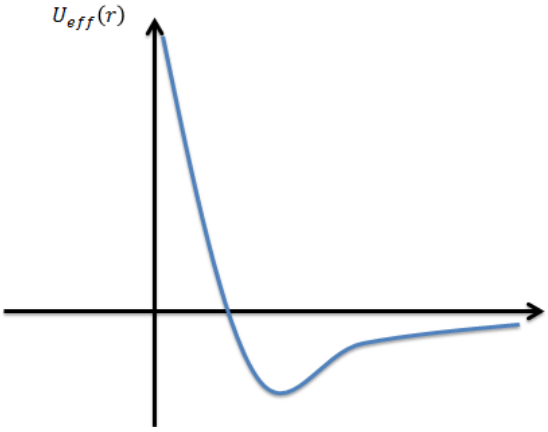
פתרון :

מצא את המהירות :

א. מתקיים כי $\Sigma F = ma \rightarrow F_r = ma_r$ ולכן $\frac{mv_0^2}{R_0} = \frac{GMm}{R_0^2}$ נעביר אגפים ונקבל $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$, וניתן לראות שאין הוא תלוי במסה, ולכן המהירות היא קבועה. מתקיים $v_1 = v_0$.

ב. מבקשים את הסרטוט של הפוטנציאל האפקטיבי.

ההגדרה של פוטנציאל אפקטיבי היא $U_{eff}=\frac{L^2}{2mr^2}+U(r)$. איך מפתחים את ההגדרה הזו? ע״פ ההגדרות של אנרגיה קינטית ותנע זוויתי,
מומלץ לבצע זאת עצמאית.
נציב את הגדרת התנע הזוויתי בביטוי ונקבל $U_{eff}=\frac{m_sR_0^2v_0^2}{2r^2}-\frac{GMm_s}{r}$. והגרף המתקבל הוא זה שמשמאל.



ג. מהי האנרגיה הכוללת שלו? מתקיים כי בכל נקודה $E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+U_{eff}$ אבל הרדיוס הוא קבוע, ולכן האנרגיה הכוללת שווה בדיוק לפוטנציאל האפקטיבי.

ד. מהי האנרגיה ברדיוס ההתחלתי שלנו (או בכל נקודה בעצם) ?
$E=U_{eff}(R_0)=\frac{m_sv_0^2}{2}-\frac{GMm_s}{R_0}=\frac{m_sGm}{2R_0}-\frac{GMm_s}{R_0}=-\frac{GMm_s}{2R_0}$.

לאחר ההתנגשות של הרובוט והלווין, הם נצמדים ומתקבלת המסה $m_z=m_s+m_r$. גם כן נתון שהמהירות היא $v=fv_0$

ה. אם נגדיר את המערכת כך שהיא הרובוט והלווין, נקבל שיש שימור תנע, ועל כן $m_sv_0-m_rv_0=m_zfv_0$. מתקיים כי $f=\frac{m_s-m_r}{m_s+m_r}$ וזה הגיוני כי בד״כ יש איבוד אנרגיה בהתנגשות פלסטית.

ו. מהו ההפרש באנרגיה הקינטית? ניתן להציב בפשטות בנוסחה. $E_k=\frac{1}{2}m_zf^2v_0^2$. את האנרגיה לפני גם ניתן להביע בקלות, וחישוב חיסור ידוע לכולם. ☺

ז. לאחר ההתנגשות, הם מתחילים לנוע באליפסה. מצא את הפוטנציאל האפקיטיבי של הגופים כעת. כאן L קבוע גם כן כי מדובר בכח מרכזי, ולכן הוא קבוע.

ח. אנחנו מניחים שמיד אחרי הנקודה הוא עוד לא מספיק להתעקם, ולכן ניתן להניח שמהירות והמיקום עדיין מאונכים זה לזה-מה שלא נכון בתנועה אליפטית רגילה. ומתקבל $L=R_0m_0fv_0$ ולכן $U_{eff}=\frac{m_zR_0^2f^2v_0^2}{2r^2}-\frac{GMm_z}{r}$. הביטוי דומה מאוד, ולכן גם הדיאגרמה.

ט. מצאו את הרדיוס המינימלי r_p במסלול האליפטי. נאמר כך : $E=U_{eff}(r_p)$ וגם ידוע שמתקיים כי $E=\frac{1}{2}mv^2+U(r)=\frac{1}{2}m_zf^2v_0^2-\frac{GMm_z}{R_0}=\frac{GMm_z}{R_0}\left[\frac{f^2}{2}-1\right]$. נשווה זאת עם הפוטנציאל האפקטיבי ונקבל $\mathrm{U_{eff}}(r_p)=\frac{GMm_z}{\mathrm{r_p}}\left[\frac{f^2}{2}-1\right]$ ועל כן נקבל את התשובה.

י. נניח ש$r_p=\frac{2}{3}R_0$, מצאו את f. הצבה פשוטה נותנת $f=\sqrt{\frac{4}{5}}$.

שאלה 3# : מבחן של סלוצקין. שנת תשע"א סמסטר א' מועד ב'.

2. גוף נע תחת השפעתם של מספר כוחות. אחד מהם ניתן על-ידי:

$$F = xy^2\hat{x} + (x^2y + 2y)\hat{y}$$

א. הוכיחו כי כוח זה הוא כוח משמר.

ב. מצאו את האנרגיה הפוטנציאלית U(x,y) כתוצאה מכוח זה.

ג. גוף נע במסלול: $\vec{r}(t) = t^2\hat{x} + (2t+1)\hat{y}$, מהי העבודה שנעשתה ע"י הכוח הנ"ל בין t=0 ל- t=3.

פתרון:

א. מוכיחים שהכח משמר: $\frac{\partial F_y}{\partial x} \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2xy$ השיוויון $2xy =$ מתקיים, ולכן הוא משמר.

ב. ע"פ הגדרה $F = -\vec{\nabla}U$ ו $\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \frac{\partial U}{\partial y} = F_y$. לכן מתקבל $U = -\frac{x^2y^2}{2} - y^2 + const$. ונבחר קבוע 0 כי זה לא מהותי, ולכן $U(x,y) = -\frac{x^2y^2}{2} - y^2$.

ג. ידוע כי מתקיים $\mathrm{W} = -\Delta\mathrm{U} = -(U_3 - U_1) = U_1 - U_3$
וגם ידוע המיקום בכל זמן, והוא $t = 3 \rightarrow (x,y) = (9,7)$, $t = 0 \rightarrow (x,y) = (0,1)$. נציב זאת בהגדרת העבודה ע"פ פוטנציאל ולכן $\mathrm{W} = U_1 - U_3 = \frac{0^2 1^2}{2} + 1^2 - \frac{9^2 7^2}{2} - 7^2 =$ $1 - 1984.5 - 49 = -2{,}032.5$ וזוהי העבודה. $\boxed{W = -2{,}032.5}$.