פתרון תרגיל לעבודה עצמית מספר 3

שאלה 1

סווג את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-3)}$. ב. $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+1}$. ג. $f(x)=x\ln x$.

ד. $f(x)=\frac{\sin(2x)}{x-3}$. ה. $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}$ ו. $f(x)=\frac{x}{1+3^{\frac{1}{x^2-1}}}$.

פתרון

א. הפונקציה לא רציפה בנקודות $x=1, x=3$.

עבור $x=1$ נקבל $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x-3}$ ולכן $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}$ והנקודה היא נקודת אי רציפות סליקה.

עבור $x=3$ נקבל ש $f(x)=\frac{x-2}{x-3} \Leftarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\infty$ ולכן הנקודה היא נקודת אי רציפות מסוג שני.

ב. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$ והנקודה $x=1$ היא נקודת אי רציפות מסוג שני.

ג. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ והנקודה היא נקודת אי רציפות סליקה.

ד. $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sin(2x)}{x-3}=\infty$ והנקודה $x=3$ היא נקודת אי רציפות מסוג שני.

ה. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{1+3^{\frac{1}{x^2-1}}}=0, \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{1+3^{\frac{1}{x^2-1}}}=1$ הנקודה $x=1$ היא נקודת אי רציפות מסוג ראשון.

$\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x}{1+3^{\frac{1}{x^2-1}}}=0, \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x}{1+3^{\frac{1}{x^2-1}}}=-1$ הנקודה $x=-1$ היא נקודת אי רציפות מסוג ראשון.

שאלה 2

עבור הפונקציות הבאות מצא את נקודות הקיצון וסווג אותן:

א. $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin x}}$ בתחום $0\le x\le\pi$. ב. $f(x)=2+\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$ ג. $f(x)=\frac{\left|x^2+8x\right|}{x^2+8}$.

פתרון

א. נגזור ונשווה לאפס כדי למצוא את הנקודות הקריטיות

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\sqrt{2-\sin x}-\frac{-\cos x\cdot\cos x}{2\sqrt{2-\sin x}}}{2-\sin x} .$$

$$f'(x)=\frac{-2\sin x(2-\sin x)+\cos^2 x}{2(2-\sin x)\sqrt{2-\sin x}}=\frac{-4\sin x+2\sin^2 x+\cos^2 x}{2(2-\sin x)\sqrt{2-\sin x}} .$$

$-4\sin x+2\sin^2 x+\cos^2 x=0$

נפתור את המשוואה $-4\sin x+2\sin^2 x+1-\sin^2 x=0$

$\sin^2 x-4\sin x+1=0$

נציב $t=\sin x$ ונקבל $t^2-4t+1=0$. $t_1=2+\sqrt{3}, t_2=2-\sqrt{3}$ מכיוון ש $2+\sqrt{3}>1$ הפתרון נפסל. נשאר לפתור את המשוואה $\sin x=2-\sqrt{3}$ והפתרונות של המשוואה (ברדיאנים כמובן) $x_1=0.2713, x_2=2.87$ קיבלנו שתי נקודות קריטיות.

נבדוק בעזרת מבחן הנגזרת השנייה האם הנקודות מקסימום/מינימום.

ראינו בשיעור שכאשר המכנה חיובי מספיק לבדוק את הסימן של הנגזרת של המונה בנקודה הקריטית.

ז"א יש לגזור את הפונקציה $g(x)=\sin^2 x-4\sin x+1 \Leftarrow g'(x)=\sin 2x-4\cos x$.

$g'(0.2713)<0$ ולכן הנקודה $(0.2713, 0.732)$ היא נקודת מקסימום.

$g'(2.87)>0$ ולכן הנקודה $(2.87,-0.732)$ היא נקודת מינימום.

נשים לב ש $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ היא נקודת מינימום בקצה ו $\left(\pi,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ היא נקודת מקסימום בקצה.

ב. $f(x)=2+\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$ נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס. $f'(x)=\frac{\frac{2x(x-4)}{2\sqrt{x^2-9}}-\sqrt{x^2-9}}{(x-4)^2}$

$$f'(x)=\frac{\frac{x(x-4)}{\sqrt{x^2-9}}-\sqrt{x^2-9}}{(x-4)^2}=\frac{x(x-4)-(x^2-9)}{(x-4)^2\sqrt{x^2-9}}=\frac{-4x+9}{(x-4)^2\sqrt{x^2-9}}$$

מכיוון שתחום ההגדרה הוא $-3\le x\le 3$ נקבל שהנגזרת לא מתאפסת והנקודות קיצון היחידות הן הנקודות קיצון בקצה. $(-3,2),(3,2)$

נשים לב ש $\lim_{x\to 4^-} f(x)=-\infty$ ולכן $(3,2)$ היא נקודת מקסימום.

הנקודה $\left(-5,1\frac{5}{9}\right),(3,2)$ נמצאת על הפונקציה ולכן $(-3,2)$ היא גם נקודת מקסימום.

ג. $f(x)=\frac{|x^2+8x|}{x^2+8}$.

ניתן לרשום את הפונקציה באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+8x}{x^2+8} & x<-8\vee 0<x\\ -\frac{x^2+8x}{x^2+8} & -8\le x\le 0\end{cases}$$

נמצא את הנגזרת של הפונקציה

עבור $x<-8\vee 0<x$ נקבל ש $f'(x)=\frac{(2x+8)(x^2+8)-2x(x^2+8x)}{(x^2+8)^2}=\frac{2x^3+8x^2+16x+64-2x^3-16x^2}{(x^2+8)^2}=$

$$\frac{-8x^2+16x+64}{(x^2+8)^2}=\frac{-8(x^2-2x-8)}{(x^2+8)^2}=\frac{-8(x-4)(x+2)}{(x^2+8)^2}$$

נשים לב שהנגזרת ב $x=4$ מתאפסת בתחום $x<-8 \vee 0<x$.

עבור $-8<x<0$ נקבל $f'(x)=\frac{8(x-4)(x+2)}{(x^2+8)^2}$ ואז הנגזרת מתאפסת כאשר $x=-2$.

נשים לב ש $f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1$ ולכן הנגזרת לא קיימת בנקודה $x=0$.

בנוסף $f'_+(-8)=2.25, f'_-(0)=-2.25$ ולכן הנגזרת לא קיימת בנקודה $x=2.25$.

סה"כ קיבלנו שהנקודות הקריטיות הן: $(-8,0),(-2,1),(0,0),(4,2)$.

נבדוק את שינוי סימן הנגזרת

x	$x<$	-8	$<x<$	-2	$<x<$	0	$<x<$	4	$<x$
$f'(x)$	שלילי		חיובי		שלילי		חיובי		שלילי

בעזרת מבחן הנגזרת הראשונה נקבל ש

$(-8,0),(0,0)$ נקודות מינימום.

$(-2,1),(4,2)$ נקודות מקסימום.

שאלה 3

מצא את נקודות הפיתול של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+\sin(2x)$ בתחום $0\le x\le\pi$.

ב. $f(x)=x\sqrt{8x-x^2}$.

ג. $f(x)=x\ln^3 x$.

פתרון

א.

נגזור פעמיים את הפונקציה $f(x)=x^2+\sin(2x)$ ונשווה לאפס.

$f'(x)=2x+2\cos(2x) \Rightarrow f''(x)=2-4\sin(2x)$.

נפתור את המשוואה $2-4\sin(2x)=0 \Rightarrow 4\sin(2x)=2 \Rightarrow \sin(2x)=\frac{1}{2}$.

הפתרון הכללי של המשוואה הוא $2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\pi k$ או $2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{5\pi}{12}+\pi k$.

נתון שהתחום הוא $0\le x\le\pi$ ולכן הנקודות החשודות לפיתול הן $x_1=\frac{\pi}{12}, x_2=\frac{5\pi}{12}$.

נבדוק את שינוי הסימן של הנגזרת השנייה

x	$x<$	$x=\frac{\pi}{12}$	$<x<$	$x=\frac{5\pi}{12}$	$<x$
$f''(x)$	חיובי		שלילי		חיובי

סה"כ קיבלנו שהנקודות $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi^2}{144}+\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5\pi}{12},\frac{25\pi^2}{144}+\frac{1}{2}\right)$ הן נקודות פיתול.

ב.

נגזור פעמיים את הפונקציה $f(x)=x\sqrt{8x-x^2}$ ונשווה לאפס.

$$. f'(x)=\sqrt{8x-x^2}+\frac{(8-2x)x}{2\sqrt{8x-x^2}} \Leftarrow f(x)=x\sqrt{8x-x^2}$$

$$. f'(x)=\frac{-2x^2+12x}{\sqrt{8x-x^2}} \Leftarrow f'(x)=\frac{8x-x^2+4x-x^2}{\sqrt{8x-x^2}} \Leftarrow f'(x)=\sqrt{8x-x^2}+\frac{(4-x)x}{\sqrt{8x-x^2}}$$

נגזור פעם שנייה

$$f''(x)=\frac{(-4x+12)\sqrt{8x-x^2}-\frac{(8-2x)(-2x^2+12x)}{2\sqrt{8x-x^2}}}{8x-x^2}=\frac{(-4x+12)\sqrt{8x-x^2}-\frac{(4-x)(-2x^2+12x)}{\sqrt{8x-x^2}}}{8x-x^2}=$$

$$\frac{(-4x+12)(8x-x^2)-(4-x)(-2x^2+12x)}{\sqrt{8x-x^2}\,(8x-x^2)}=\frac{4x^3-44x^2+96x-2x^3+20x^2-48x}{\sqrt{8x-x^2}\,(8x-x^2)}=\frac{2x^3-24x^2+48x}{\sqrt{8x-x^2}\,(8x-x^2)}$$

נפתור את המשוואה $x^2-12x+24=0$ ונקבל $x_1=9.46$ לא בתחום הגדרה.

הנקודה $x_2=2.5359$ חשודה לפיתול.

נבדוק את שינוי הסימן של הנגזרת השנייה

x	$0<x<$	$x=2.5359$	$<x<8$
$f''(x)$	חיובי		שלילי

הנקודה $(2.5359,9.44)$ היא נקודת פיתול.

ג. $f(x)=x\ln^3 x$ נגזור פעמיים ונשווה לאפס.

$$. f''(x)=\frac{3\ln^2 x}{x}+\frac{6\ln x}{x} \Leftarrow f'(x)=\ln^3 x+3\ln^2 x \Leftarrow f(x)=x\ln^3 x$$

נפתור את המשוואה $\ln^2 x+2\ln x=0$ ונקבל $x_1=1, x_2=\frac{1}{e^2}$.

נבדוק את שינוי הסימן של הנגזרת השנייה

x	$0<x<$	$x=\frac{1}{e^2}$	$<x<$	$x=1$	$<x$
$f''(x)$	חיובי		שלילי		חיובי

ולכן הנקודות $\left(\frac{1}{e^2},-\frac{8}{e^2}\right),(1,0)$ הן נקודות פיתול.

<u>שאלה 4</u>

מצא את כל האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. ב. $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. ג. $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$.

<u>פתרון</u>

א. אין אסימפטוטות אנכיות.

נחשב אסימפטוטה משופעת ב ∞

$$. a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(x^2+1)}=0$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$.

קיבלנו אסימפטוטה אופקית $y=0$.

נחשב אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x(x^2+1)}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$.

קיבלנו אסימפטוטה אופקית $y=0$.

ב. $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\infty$ ואז $x=1$ אסימפטוטה אנכית

נחשב אסימפטוטה משופעת ב ∞

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt[3]{x^2-1}}=0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt[3]{x^2-1}}=0$.

קיבלנו אסימפטוטה אופקית $y=0$.

נחשב אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x\sqrt[3]{x^2-1}}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x\sqrt[3]{x^2-1}}=0$.

קיבלנו אסימפטוטה אופקית $y=0$.

ג. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x-1}=\infty$ ולכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ ולכן $x=1$ לא אסימפטוטה אנכית.

נחשב אסימפטוטה משופעת

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\ln x}{x-1}=0$ ולכן יש אסימפטוטה אופקית $y=0$.

<u>שאלה 5</u>

חקור את הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{-x}$ על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.
ב. נקודות חיתוך עם הצירים.
ג. נקודות קיצון.
ד. תחומי עלייה וירידה.
ה. נקודות פיתול.
ו. שרטוט.

<u>פתרון</u>

א. $0\le x$.

ב. $(0,0)$.

ג+ד. נגזור נשווה לאפס $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{-x} \Leftarrow f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}e^{-x}$.

נפתור את המשוואה $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}=0 \Leftarrow 1-2x=0 \Leftarrow x=\dfrac{1}{2}$.

נסווג את נקודות הקיצון ונמצא תחומי עלייה וירידה בעזרת סימן הנגזרת.

x	$0<x<$	$x=\dfrac{1}{2}$	$<x$
$f'(x)$	חיובי		שלילי

נקודות קיצון

$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ מקסימום. $(0,0)$ מינימום בקצה.

תחומי עלייה $0<x<\dfrac{1}{2}$.

תחומי ירידה $\dfrac{1}{2}<x$.

ד. נגזור פעם שנייה ונמצא את נקודות הפיתול.

$$f''(x)=\frac{-2\sqrt{x}e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}}{4x}-\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}e^{-x}=-\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}-\frac{e^{-x}}{4x\sqrt{x}}-\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}e^{-x}$$

$$=e^{-x}\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)=\frac{e^{-x}\left(-4x-1+4x^2\right)}{4x\sqrt{x}}$$

נפתור את המשוואה

$4x^2-4x-1=0$ ונקבל פתרון אחד שלילי שנפסל והפתרון השני $x=1.207$ חשוד לפיתול.

נבדוק ע"י טבלה

x	$0<x<$	$x=1.207$	$<x$
$f''(x)$	שלילי		חיובי

קיבלנו שהנקודה $(1.207,0.3286)$ היא נקודת פיתול.