תרגיל 13

1. מצא צורה אלכסונית קנונית למטריצה הבאה: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1+3i & 1+3i & 0 \\ 5+3i & 3+3i & 2 \end{pmatrix}$

פתרון:

(א)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1+3i & 1+3i & 0 \\ 5+3i & 3+3i & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1+3i & 1+3i \\ 2 & 3+3i & 5+3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1+3i & 1+3i \\ 0 & 1+3i & 1+3i \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3i & 1+3i \\ 0 & 1+3i & 1+3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 0 & 1+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ 1+3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & -4-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 4+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כדי להגיע לדירוג קנוני (ולא דירוג גאוס) בכל שלב נביא את האיבר הכי קטן לפינה ונאפס את השורה והעמודה המתאימות. בשלבים האחרונים נעזרנו בחישוב

$$\gcd(2, 1+3i) = 1+i = -i \cdot 2 + 1 \cdot (1+3i)$$

2. יהי $R = \mathbb{Q}[x]$ ונתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 2 & -6 \\ 1 & x & -3 \\ 1 & 1 & x-4 \end{pmatrix}$$

יהי $M = R^3/AR^3$. הוכיחו כי $\langle 1-x^2 \rangle \subseteq Ann(M)$.

פתרון. נחליף בין שתי השורות הראשונות של A ונחש

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -3 \\ x+1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & x-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-(x+1)R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & x & -3 \\ 0 & -x^2-x+2 & 3(x-1) \\ 0 & 1-x & x-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3+3C_1\to C_3]{C_2-xC_1\to C_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)(x+2) & 3(x-1) \\ 0 & 1-x & x-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & (1-x)(x+2) & 3(x-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-(x+2)R_2\to R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & 0 & -(x-1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3+C_2\to C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -(x-1)^2 \end{pmatrix} = D$$

כלומר

$$M \cong R^3/DR^3 \cong (R/\langle 1-x\rangle) \times \left(R/\left\langle (1-x)^2\right\rangle\right)$$

כשמסתכלים על איבר כללי $a = \left(f+\langle 1-x\rangle, g+\left\langle (1-x)^2\right\rangle\right) \in M$ קל לראות כי $(1-x)^2\cdot a = 0_M$, ולכן $\left\langle 1-x^2\right\rangle \subseteq Ann(M)$ (למעשה יש שיוויון).

3. חשבו את הסדר של החבורה החיבורית

$$G = \left\langle a,b \mid \begin{matrix} 88a+20b & =0 \\ -212a-56b & =0 \end{matrix} \right\rangle$$

פתרון:

$G \cong \mathbb{Z}^2/A\mathbb{Z}^2$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 88 & -212 \\ 20 & -56 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 88 & -212 \\ 20 & -56 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 20 & -56 \\ 88 & -212 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 88 & 52 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 52 & 88 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 52 & -172 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -172 \end{pmatrix}$$

לכן $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/172\mathbb{Z}$.

4. יהי F שדה. נתבונן במודול $M = F[x]^2/AF[x]^2$ מעל $F[x]$ כאשר $A = \left(\begin{smallmatrix} x & x \\ x & x \end{smallmatrix}\right)$. מהו המימד של M כמרחב וקטורי מעל F?

פתרון. נחשב את הצורה האלכסונית הקנונית של A ונקבל $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. לכן

$$M \cong F[x]/\langle x\rangle \oplus F[x]/\langle 0\rangle \cong F \oplus F[x]$$

מכיוון ש-$F[x]$ הוא מרחב וקטורי ממימד אינסופי, אז גם M ממימד אינסופי.

5. מצאו את הגורמים הראשיים מעל החוג $\mathbb{Z}$ של המודול $M_A = \mathbb{Z}^3/A\cdot\mathbb{Z}^3$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

פתרון

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 9 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -18 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -18 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

לכן המודול איזומורפי ל$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.