תורת הקבוצות־ תרגיל בית 4

1. הוכיחו שלכל שתי קבוצות סדורות היטב A, B מתקיים אחד מהבאים:

   (א) $A \cong B$

   (ב) A איזומורפי לרישא של B.

   (ג) B איזומורפי לרישא של A.

נסמן $type(A) = \alpha, type(B) = \beta$.

מטריכוטומיות של סודרים ידוע שאו $\alpha = \beta$, או שאחד מהם שווה לרישא של השני.

אם $\alpha = \beta$אז $A \cong B$ מהרכבת איזומורפיזמים.

אם, בה"כ, α שווה לרישא של β, אז שוב, מהרכבת איזומורפזמים, A איזומורפי לרישא של B.

הסבר יותר מפורט: תהי $g : \beta \to B$ איזו סדר. $\alpha \in \beta$. נסמן $g(\alpha) = b \in B$.

טענה: $\alpha \cong seg(b)$.

הוכחה: ידוע ש $\alpha = seg(\alpha)$. נוכיח ש $seg(\alpha) \cong seg(b)$.

נסתכל על הצמצום של g ל $seg(\alpha)$. צמצום של פו' שומרת סדר הוא פו' שומרת סדר.

נותר להוכיח ש $g[seg(\alpha)] = seg(b)$.\

ובכן, יהי $\gamma < \alpha$. אז, $g(\alpha) = b$, $g(\gamma) < g(\alpha) = b$, לכן $g(\gamma) \in seg(b)$.

מצד שני, יהי $c \in seg(b)$. אז $c < b$. לכן $g^{-1}(c) < g^{-1}(b) = \alpha$. כלומר, $g^{-1}(c) \in seg(\alpha) \Longleftarrow c \in g[seg(\alpha)]$. כלומר, $seg(b) \subseteq g[seg(\alpha)]$.

לסיכום, $\alpha \cong seg(b)$, ומכיוון שA איזומורפי לα נקבל שA איזומורפי לרישא של B.

2. הוכיחו שלכל סודר אינסופי α (כלומר, $\omega \leq \alpha$) מתקיים:

   (א) $1 + \alpha = \alpha$.

   (ב) $n + \alpha = \alpha$ לכל n טבעי.

   (א) מטענה שהוכחנו בתרגול נקבל: $\alpha = \omega + (\alpha - \omega)$. אז $1 + \alpha = 1 + (\omega + (\alpha - \omega)) = (1 + \omega) + (\alpha - \omega) = \omega + (\alpha - \omega) = \alpha$. (מכייון שעבור ω כבר הוכחנו את הטענה בכיתה).

   (ב) באינדוקציה: עבור $n = 0$ ידוע. נניח ש$n + \alpha = \alpha$. נוכיח עבור$n + 1$. ובכן, $(n + 1) + \alpha = n + (1 + \alpha) = n + \alpha = \alpha$.

3. הוכיחו/ הפריכו:

(א) אם β סודר עוקב אז $\alpha+\beta$ עוקב.

(ב) אם α סודר גבולי אז $\alpha+\beta$ גבולי.

(א) הוכחה: קיים γ כך ש $\beta=\gamma+1$. אז $\alpha+\beta=\alpha+(\gamma+1)=(\alpha+\gamma)+1=s(\alpha+\gamma)$.

(ב) הפרכה: נקח $\alpha=\omega,\beta=1$. אז α גבולי, אבל $\alpha+\beta$ לא גבולי.

4. תנו דוגמא לכך ש $(\beta-\alpha)+\alpha\neq\beta$.

נקח $\alpha=1,\beta=\omega$. אז $\beta-\alpha=\omega$. אבל, $\omega+1\neq\omega$.

5. תהי A קבוצה לא ריקה של סודרים. הוכיחו ש $\sup\{\alpha+1|\alpha\in A\}$ הוא הסודר הראשון שגדול ממש מכל איברי A.

ראשית, נוכיח שהוא גדול ממש מכל איברי A. יהי $\alpha\in A$. אז $\alpha<\alpha+1\leq\sup\{\alpha+1|\alpha\in A\}$. כלומר, $\alpha<\sup\{\alpha+1|\alpha\in A\}$.

כעת, יהי $\beta<\sup\{\alpha+1|\alpha\in A\}$. כלומר, יש β הוא לא הסופרימום־ יש $\alpha\in A$ כך ש $\beta<\alpha+1\Longleftarrow\beta\leq\alpha$. כלומר, β לא גדול ממש מכל איברי A.