ב"ש בדידה תשעח מועד א

1. פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תקרא <u>ממשיכה</u> אם

$$\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1<x_2)\wedge(f(x_1)\leq f(x_2))$$

פתרון: פונקציה היא ממשיכה אם לכל x_1 קיים x_2 שגדול ממנו עבורו מתקיים $f(x_1)\leq f(x_2)$. השלילה הלוגית היא

$$\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1\geq x_2)\vee(f(x_1)>f(x_2))$$

כלומר שקיים x_1 כך שלכל x_2 שגדול ממנו מתקיים $f(x_1)>f(x_2)$

(א) האם $f(x)=\sin(x)$ ממשיכה?
פתרון: כן . יהא x_1 צריך להוכיח שקיים x_2 שגדול ממנו כך ש $f(x_1)\leq f(x_2)$. נגדיר $x_2=x_1+2\pi$ ואז $x_1<x_2$ ומתקיים כי

$$f(x_1)=\sin(x_1)=\sin(x_2)=f(x_2)$$

בגלל המחזוריות של sinובפרט $f(x_1)\leq f(x_2)$ כנדרש.

(ב) האם $f(x)=x^2$ ממשיכה?
פתרון: כן. יהא x_1 ממשי. צריך להוכיח שקיים x_2 שגדול ממנו כך ש $f(x_1)\leq f(x_2)$. נגדיר $x_2=|x_1|+1$ ואז אכן $x_1<x_2$ ומתקיים

$$f(x_1)=(x_1)^2=|x_1|^2\leq(|x_1|+1)^2=f(x_2)$$

כאשר האי-שיווין נובע מכך ש x^2 פונקציה עולה במספרים החיובים (ליתר דיוק במספרים האי-שליליים).

(ג) תהי f ממשיכה. האם בהכרח $g(x)=-f(-x)$ ממשיכה?
פתרון: לא, למשל $f(x)=x^2$ ממשיכה (סעיף קודם) אבל $g(x)=-f(-x)=-(-x)^2=-x^2$ אינה ממשיכה. הוכחה: נוכיח שעבור $x_1=0$ מתקיים

$$\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1\geq x_2)\vee(f(x_1)>f(x_2))$$

(המשך הפסוק הלוגי שמגדיר פונקציה ממשיכה). יהא $x_2\in\mathbb{R}$. אם $x_2\leq x_1$ סיימנו. אחרת $x_1<x_2$ ואז x_2 בפרט חיובי (כי $0=x_1<x_2$) ולכן $-(x_2)^2$ שלילי ולכן

$$f(x_1)=f(0)=0>-(x_2)^2=f(x_2)$$

.

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A\cap B\subseteq C$ אזי $(A\backslash C)\cap B=\emptyset$.

פתרון: הוכחה: נניח $A\cap B\subseteq C$ ונוכיח כי $(A\backslash C)\cap B=\emptyset$. נניח בשלילה כי $(A\backslash C)\cap B\neq\emptyset$ אזי קיים

$$x\in(A\backslash C)\cap B$$

כלומר, $x\in A\backslash C$ וגם $x\in B$. לכן $x\in A$ וגם $x\in B$ וגם $x\notin C$. לכן $x\in A\cap B$ וממהנחה ש $A\cap B\subseteq C$ נסיק ש $x\in C$ אבל ראינו ש $x\notin C$. סתירה.

(ב) לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $A\cup(B\backslash A)=B\cup(A\backslash B)$.
פתרון: הוכחה: נסמן $U=A\cup B$ ונתייחס למשלים ביחס ל U:

$$A\cup(B\backslash A)\underbrace{=}_{\text{זהות}}A\cup(B\cap A^c)\underbrace{=}_{\text{פילוג}}(A\cup B)\cap(A\cup A^c)\underbrace{=}_{\text{פילוג}}(A\cup B)\cap U=A\cup B$$

ובאופן דומה נקבל ש $B\cup(A\backslash B)=B\cup A$ ומכיוון ש $A\cup B=B\cup A$ נקבל את השיוויון המבוקש בשאלה.

(ג) לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $A\backslash B\in P(A)\backslash P(B)$.
פתרון: הפרכה: $A=B=\{1\}$ ואז $A\backslash B=\emptyset$ ולכן $A\backslash B\in P(B)$ (כי בקבוצת חזקה $P(*)$ תמיד נמצאת הקבוצה הריקה) ולכן $A\backslash B\notin P(A)\backslash P(B)$.

3. הוכיחו באינדוקציה (רגילה או מלאה) כי לכל n מתקיים 4^n+2 מתחלק ב 3 ללא שארית.
פתרון: הוכחה:

- בסיס $n=1$: אכן, $4^1+2=6$ מתחלק ב 3 ללא שארית.
- צעד: נניח נכונות עבור n, כלומר, n^2+2 מתחלק ב 3 ללא שארית. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר, $4^{n+1}+2$ מתחלק ב 3 ללא שארית. מתקיים

$$4^{n+1}+2=4\cdot4^n+2=3\cdot4^n+(4^n+2)$$

ומכיוון ש (4^n+2)מתחלק ב 3 ללא שארית (הנחת האינדוקציה) וגם $3\cdot4^n$ מתחלק ב 3 ללא שארית אז גם הסכום שלהם מתחלק ב 3 ללא שארית.

4. תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $f\circ g=g\circ f$ הפיכה אזי: f הפיכה אם ורק אם g הפיכה.
פתרון: הפרכה: נגדיר $g(x)=Id$ שהיא פונקציה הפיכה ונגדיר f להיות הפונקציה הקבועה $f(x)=1$ שהיא לא הפיכה (היא לא על). מתקיים כי $f\circ g=f=g\circ f$ אבל לא מתקיים ה"אזי" שכן g הפיכה ו f לא.

(ב) אם $f\circ g=g\circ f$ הפיכה וגם $f\circ g$ הפיכה אזי f,g הפיכות.
פתרון: בהנחה ש $f\circ g=g\circ f$ הפיכה וגם $f\circ g$ הפיכה, נקבל שגם $g\circ f$ הפיכה. מכיוון ש $f\circ g$ הפיכה היא חח"ע ועל ולכן g חח"ע ו f על. מכיוון ש $g\circ f$ הפיכה היא חח"ע ועל ולכן f חח"ע ו g על. סה"כ קיבלנו ש f,g שתיהן חח"ע +על, כלומר הפיכות.

(ג) אם f חח"ע אזי $f+f$ חח"ע.
פתרון: הוכחה: נניח כי f חח"ע ונוכיח כי $f+f$ חח"ע. נניח כי $(f+f)(x)=(f+f)(y)$ונוכיח כי $x=y$. אכן השיוון $(f+f)(x)=(f+f)(y)$ הוא השיוון

$$f(x)+f(x)=f(y)+f(y)$$

כלומר $2f(x)=2f(y)$ ולכן $f(x)=f(y)$ ומכיוון ש f חח"ע נקבל ש $x=y$ כמבוקש.

5. כמה סדרות המורכבות מהאותיות a,b,c,d,e באורך 5ישנן כך ש:

(א) לפחות אות אחת חוזרת פעמיים.
פתרון: מספר כל הסדרות באורך חמש הוא 5^5 (5 אורך המילה ו 5 אותיות אפשריות). מספר הסדרות שבהן כל אות

משתתפת בדיוק פעם 1 הוא !5. אם ישנה אות שלא משתתפת אזי תהיה אות אחרת שתופיע פעמיים ולכן !5 הוא מספר הסדרות שכל האותיות מופיעות לכל היותר פעם אחת. לכן מספר הסדרות שלפחות אות אחת חוזרת פעמיים שווה

$$\underbrace{5^5}_{\text{כל הסדרות}} - \underbrace{5!}_{\text{כל הסדרות שכל האותיות מופיעות לכל היותר פעם אחת}}$$

(ב) כל אות מופיע לפחות פעם אחת.

פתרון: אם כל אות מפיעה לפחות פעם אחת ואורך המילה היא 5 אז כל אות מופיע בדיוק פעם אחת. מספר הדרכים לסדר 5 אותיות בסדרה הוא !5.

(ג) לפחות אחת מבין האותיות a, b אינה מופיעה.

פתרון: נסמן A_1 מספר הסדרות בהן a אינה מופיע וב A_2 את מספר הסדרות בהן b אינה מופיע. נרצה לחשב את $|A_1 \cup A_2|$.

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

נחשב: $|A_1| = |A_2| = 4^5$ כי $\underbrace{4}_{\text{מספר האפשרויות לאות האחרונה}} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \underbrace{4}_{\text{מספר האפשרויות לאות הראשונה}}$. באופן דומה $|A_1 \cap A_2| = 3^5$

ולכן התשובה הסופית היא

$$4^5 + 4^5 - 3^5 = 2 \cdot 4^5 - 3^5$$