פתרון תרגיל 10 – טופולוגיה 2014

שאלה 1

א. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס.

ב. הראו שאם B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב (X,τ), המכיל בסיס B_2 ל- τ, אזי B_1 הוא בעצמו בסיס ל- τ.

ג. יהיו τ_1,τ_2 טופולוגיות על X. יהי B_1 בסיס ל- (X,τ_1). אזי: $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אם ורק אם $B_1 \subseteq \tau_2$.

פתרון

א. בתור בסיס ניתן לקחת את הטופולוגיה עצמה (קל לראות שהתכונות הדרושות עבור בסיס מתקיימות באופן טריוויאלי).

ב. B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות ולכן נותר לבדוק את התנאי השני. תהי $O \in \tau$ ותהי $x \in O$. נרצה למצוא $U \in B_1$ כך ש- $x \in U \subseteq O$. B_2 בסיס ולכן קיימת $U \in B_2$ המקיימת $x \in U \subseteq O$. מכיוון ש- $B_2 \subseteq B_1$ נקבל ש- $U \in B_1$ וקיבלנו את הדרוש.

ג. אם $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אזי ברור ש- $B_1 \subseteq \tau_2$ (כי $B_1 \subseteq \tau_1$ כבסיס ל- (X,τ_1)). בכיוון השני: תהי $O \in \tau_1$. קיימת משפחה של אינדקסים I ומשפחה של קבוצות $\{U_i\}_{i\in I}$ כך שלכל $i \in I$ $U_i \in B_1$ ומתקיים $O = \bigcup_{i\in I} U_i$ (מהגדרת בסיס). נתון כי $B_1 \subseteq \tau_2$ ולכן לכל $i \in I$ $U_i \in \tau_2$. אך τ_2 היא טופולוגיה ולכן $O = \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_2$.

שאלה 2

א. יהיו X,Y מ"ט. יהיו $F \subseteq X, G \subseteq Y$ סגורות. הוכיחו כי הקבוצה $F \times G$ סגורה ב- $X \times Y$.

ב. יהיו X,Y מ"ט, $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$ (או בסימון חלופי: $cl(A\times B)=cl(A)\times cl(B)$).

ג. יהי (X,τ_{cof}) מ"ט אינסופי עם הטופולוגיה הקו-סופית. נסמן ב- τ את טופולוגיית המכפלה על $X\times X$. האם τ היא הטופולוגיה הקו-סופית על $X\times X$? הוכיחו או הפריכו!

<u>**פתרון**</u>

א. נראה שהמשלים של $F\times G$ הינה קבוצה פתוחה.

$(F\times G)^C=((X\setminus F)\times Y)\bigcup(X\times(Y\setminus G))$ והיא פתוחה כאיחוד פתוחות (בסיסיות).

ב. בכיוון הראשון $\supseteq$:

תיהי $(a,b)\in\bar{A}\times\bar{B}$ ונראה ש- $(a,b)\in\overline{A\times B}$.

מהגדרת הבסיס לטופולגיית המכפלה מ"ל שלכל $U\subseteq X,V\subseteq Y$ סביבות של a,b בהתאמה, מתקיים: $(U\times V)\bigcap(A\times B)\neq\varnothing$.

תהיינה $U\subseteq X,V\subseteq Y$ סביבות של a,b בהתאמה. מכיוון ש- $a\in\bar{A}\wedge b\in\bar{B}$ נקבל ש- $(V\bigcap B)\neq\varnothing\ \wedge\ (U\bigcap A)\neq\varnothing$. מכאן רואים כי: $\varnothing\neq(U\bigcap A)\times(V\bigcap B)=(U\times V)\bigcap(A\times B)$.

הערה: $U\times V$ היא סביבה בסיסית, וראינו בכיתה שבהגדרת סגור מספיק לרוץ על הסביבות הבסיסיות.

בכיוון השני $\subseteq$:

על-פי סעיף א', $\overline{A}\times\overline{B}$ סגורה וכמו כן מתקיים $A\times B\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$ ולכן $\overline{A\times B}\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$.

ג. עבור $a\in X$ כלשהו נתבונן ב- $X\times\{a\}\subseteq X\times X$. אזי $X\times\{a\}$ סגורה בטופולוגיית המכפלה (לפי סעיף א' + הגדרת הטופולוגיה הקו-סופית).

עם זאת, הקבוצה $X\times\{a\}$ אינה סגורה בטופולוגיה הקו-סופית על $X\times X$ שכן היא לא כל המרחב ואינה סופית.

<u>שאלה 3</u>

א. יהי X מ"ט. נגדיר את האלכסון של $X\times X$ להיות $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$.

הראו שאם Δ סגור ב- $X\times X$ אזי X הוא האוסדורף. (שימו לב שאת הכיוון השני של הטענה הזו הוכחנו בתרגול.)

ב. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי (X,τ) עם קבוצה צפופה $A\subseteq X$ ושתי פונקציות <u>רציפות</u> <u>שונות</u> $f,g:X\to X$ המתלכדות על A.

<u>פתרון</u>

א. נניח שהאלכסון Δ סגור ב- $X\times X$ ונניח בשלילה ש- X אינו האוסדורף. אזי קיימות $a\neq b\in X$ כך **שלכל** U,V סביבות של a,b בהתאמה, $U\cap V\neq\varnothing$. אך אז נקבל שלכל סביבה בסיסית $U\times V$ של (a,b) (הכוונה לקבוצה בבסיס של טופולוגיית המכפלה) מתקיים $(U\times V)\cap\Delta\neq\varnothing$ (מדוע?) וזה מראה כי $(a,b)\in cl(\Delta)$ (הראינו שבהגדרה של סגור מספיק לבדוק סביבות בסיסיות) למרות ש$(a,b)\notin\Delta$ וזו סתירה לכך שהאלכסון Δ סגור.

ב. נתבונן במרחב $(\mathbb{R},\tau_{triv})$ ובקבוצה הצפופה $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ (מדוע היא צפופה?). נתבונן בנוסף בשתי פונקציות $g(x)=1$, $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. הן רציפות (מדוע?), שונות ומתלכדות על $\mathbb{Q}$.

<u>שאלה 4</u>

יהיו X_1,X_2 מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש-$X_1\times X_2\cong X_2\times X_1$.

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקציה $f:X_1\times X_2\to X_2\times X_1$ על-ידי $f(a,b)=(b,a)$. נוכיח שהיא רציפה. זוהי פונקציה לתוך מרחב מכפלה ולכן מספיק לבדוק רציפות בכל רכיב. כלומר, רציפות של הפונקציות $p_1\circ f\ ,\ p_2\circ f$ כאשר

$p_1 : X_2 \times X_1 \to X_2 \; ; \; p_2 : X_2 \times X_1 \to X_1$. מתקיים:

$p_1 \circ f : X_1 \times X_2 \to X_2 \;,\; p_2 \circ f : X_1 \times X_2 \to X_1$ ואלה למעשה פונקציות ההטלה על הרכיבים המתאימים (וידוע שהן רציפות).

ההופכית של f היא: $g : X_2 \times X_1 \to X_1 \times X_2 \quad g(a,b) = (b,a)$ וניתן להראות שהיא רציפה (באופן דומה).

לכן f הומיאומורפיזם.

<u>שאלה 5</u>

תהי $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ קבוצה ונגדיר שני אוספים של תת-קבוצות של X:

$B_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\},...\}$, ו-$B_2 = \{Z \subseteq X : \; X \setminus Z = \{1,2,3,...,n\}$ עבור n כלשהו$\}$.

א. הוכיחו כי $B = B_1 \cup B_2$ הוא בסיס לטופולוגיה כלשהי τ על X.

ב. הוכיחו ש-(X,τ) הוא מרחב טופולוגי האוסדורף.

<u>פתרון</u>

א. יש לבדוק שני תנאים.

1. הקבוצה $X \setminus \{1\} \in B_2$ (בדקו) וכן $\{1\} \in B_1$. מתקיים $X = (X \setminus \{1\}) \cup \{1\}$.

2. יהיו $C, D \in B$.

אם $C, D \in B_1$ אזי חיתוכן ריק או נקודון. ובכל מקרה ניתן להציג את $C \cap D$ כאיחוד של קבוצות מ-B.

אם $C \in B_1, D \in B_2$ אזי חיתוכן ריק או נקודון (וחזרנו למקרה הקודם).

אם $C, D \in B_2$ אזי $C \cap D \in B_2$. אכן, קיימים $m,n \in \mathbb{N}$ כך ש-$X \setminus C = \{1,...,n\}, \; X \setminus D = \{1,...,m\}$. מתקיים

$X \setminus (C \cap D) = (X \setminus C) \cup (X \setminus D) = \{1,...,\max\{n,m\}\}$.

ב. יהיו $x \neq y \in X$. אם $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ אזי נפרידן עם סביבות זרות של x, y בהתאמה: $\{x\},\{y\} \in B_1$.

אחרת, בה"כ $x = 0,\ y \neq 0$. הסביבות הדרושות הן $y \in \{y\} \in B_1$, $x \in X \setminus \{y\} \in B_2$. קל לראות שהסביבות זרות.

<u>שאלה 6</u>

תהי $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכיחו ש- f הומיאומורפיזם.

<u>הדרכה מומלצת</u>:

א. הראו שלכל $a < b$ קיימים $c < d$ כך ש-$f[a,b] = [c,d]$; בנוסף,

ב. ($f(a) = c$ וגם $f(b) = d$) או ($f(a) = d$ וגם $f(b) = c$)

[כלומר, f (במקרה הזה) מעבירה שפה לשפה.]

ג. הסיקו ש- f פתוחה ולכן גם הומיאומורפיזם.

<u>פתרון</u>

א. $[a,b]$ קומפקטי וקשיר ולכן $f([a,b])$ קומפקטי וקשיר (בגלל הרציפות). תת-מרחבים קשירים וקומפקטיים של $\mathbb{R}$ (פרט לנקודונים) הם מהצורה $[c,d]$ (ונשים לב ש-$f([a,b])$ אינו נקודון, שכן f חח"ע).

לכן ניתן להסיק שקיימים $c,d \in \mathbb{R}$ כך ש- $f([a,b]) = [c,d]$.

ב. נראה כעת שייתכן רק אחד משני המצבים הבאים:

1) $f(a) = c \wedge f(b) = d$, או

2) $f(a) = d \wedge f(b) = c$.

אמנם, אחרת קיים $x \in (c,d)$ כך ש- $f(a) = x$ או $f(b) = x$.

נניח ש- $f(a) = x$ (בשלילה).

מתקיים $\left(a,b\right]$ ת"מ קשיר אבל $f\left(\left(a,b\right]\right)=\left[c,x\right)\cup\left(x,d\right]$ אינו קשיר וזו סתירה שכן פונקציה רציפה שולחת מרחב קשיר למרחב קשיר ו- $\left[c,x\right)\cup\left(x,d\right]$ אינו קשיר. בצורה דומה ניתן להוכיח שלא יתכן ש- $f\left(b\right)=x$ כאשר $x\in\left(c,d\right)$.

לכן בהכרח מתקיים אחד מהמצבים 1) או 2).

ג. מכל אחד מהמקרים הללו ניתן להסיק ש- $f\left(\left(a,b\right)\right)=\left(c,d\right)$. כלומר, פתוחה בסיסית (כלומר קטע פתוח) עוברת לפתוחה. מכאן הפונקציה היא פתוחה ולכן היא הומיאומורפיזם.

<u>שאלה 7</u>

א. הוכיחו/הפריכו: לישר של סורגנפריי יש בסיס המורכב מקבוצות סגוחות.

ב. הוכיחו ש- $\left\{B_{d_5}\left(a,\frac{1}{5^n}\right):a\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$ מהווה בסיס למרחב המטרי $\left(\mathbb{Z},d_5\right)$.

<u>פתרון</u>

א. ידוע שאוסף כל הקטעים מהצורה $\left[a,b\right)$ מהווה בסיס לטופולוגיה של הישר של סורגנפריי. למעשה זה נובע ממה שהוכחתם בשאלה 6 א' בתרגיל בית 5. נראה שכל קבוצה $\left[a,b\right)$ גם סגורה בטופולוגיה זו וזה יסיים את ההוכחה. בשאלה 7 ג' במציאת הסגור של $\left[0,1\right)$ הוכחתם למעשה ש-$\left[0,1\right)$ סגורה. באופן דומה קל להוכיח שכל קבוצה מהצורה $\left[a,b\right)$ סגורה בטופולוגיה זו.

ב. ברור שכל הכדורים $B_{d_5}\left(a,\frac{1}{5^n}\right)$ מהאוסף האמור הן קבוצות פתוחות שכן באופן כללי בכל מ"מ כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה. נראה שמתקיים

התנאי השני. תהי O פתוחה ב-$\left(\mathbb{Z},d_5\right)$ ויהי $a\in O$. ברור ש-$a\in\mathbb{Z}$. כמו כן, מהגדרת קבוצה פתוחה במרחב מטרי נקבל שקיים $\varepsilon>0$ כך ש-$O\subseteq B_{d_5}\left(a,\varepsilon\right)\ni a$. לכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$\varepsilon>\frac{1}{5^n}$ ומכאן

$O\subseteq B_{d_5}\left(a,\varepsilon\right)\subseteq B_{d_5}\left(a,\frac{1}{5^n}\right)\ni a$.