פתרון תרגיל בית 9 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. תהי $E/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה כך ש-$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_n$. הוכיחו כי יש ל-$E$ תת־שדה K כך ש-$[K:\mathbb{Q}] = 2$.

פתרון. ל-S_n יש תת־חבורה ידועה מאינדקס 2 והיא A_n. לפי התאמת גלואה E^{A_n} הוא תת־שדה כך ש-$[E:E^{A_n}] = \frac{n!}{2}$ ולכן $[E^{A_n}:\mathbb{Q}] = 2$, כדרוש.

שאלה 2. חשבו את חבורות גלואה הבאות ואת סריג תת־החבורות שלהן. מצאו גם את סריג תת־השדות של ההרחבות המתאימות.

א. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)/\mathbb{Q})$

ב. $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של x^3-7.

ג. $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של x^7-1.

פתרון.

א. נשים לב ש-$\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ הוא שדה הפיצול של הפולינום הספרבילי $(x^2+1)(x^2-2)$. מפני שאנחנו כבר יודעים כי $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},i):\mathbb{Q}] = 4$, אז אנחנו גם יודעים שבחבורת גלואה יש 4 איברים. נבדוק האם היא $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ או $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. נניח φ איבר בחבורת גלואה. אנחנו כבר יודעים שחייב להתקיים

$$\varphi(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}, \qquad \varphi(i) = \pm i$$

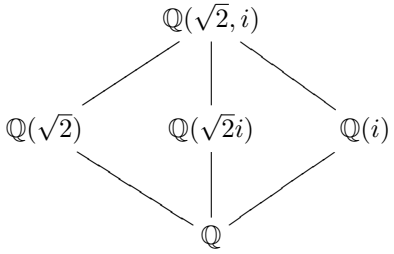
ולכן הסדר של φ בחבורת גלואה הוא לכל היותר 2. זה מחייב שחבורת גלואה היא $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. באופן שקול, ראינו כי חבורת גלואה במקרה כזה משוכנת ב-$S_2\times S_2$ והיא מסדר 4.
שווה לציין שאנחנו גם יודעים די בקלות איך האוטומורפיזמים האלה נראים. אנחנו יודעים שבסיס ל-$\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $1, \sqrt{2}, i, \sqrt{2}i$. לכן למשל איזומורפיזם ששולח

$$\sqrt{2} \to -\sqrt{2}, \qquad i \to -i$$

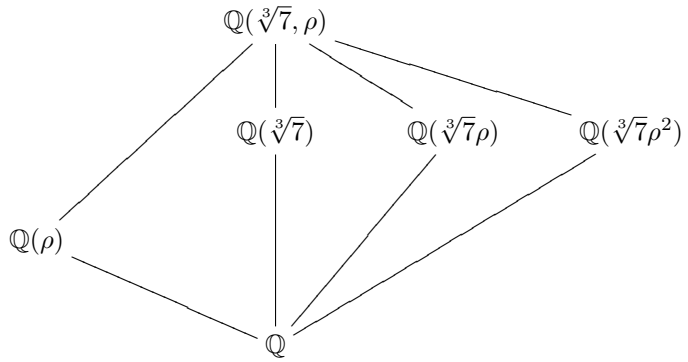
ישלח איבר כללי

$$\varphi(a+b\sqrt{2}+ci+d\sqrt{2}i) = a-b\sqrt{2}-ci+d\sqrt{2}i$$

סריג תת־השדות הוא



ב. יהי ρ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3. שורשי הפולינום הם $\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}\rho, \sqrt[3]{7}\rho^2$. מכאן קל לראות ששדה הפיצול של הפולינום הוא $E = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}, \rho]$. בפרט $[E : \mathbb{Q}] = 6$ כי $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}] : \mathbb{Q}] = 3$ ו-$[\mathbb{Q}[\rho] : \mathbb{Q}] = 2$ זרים. בנוסף $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ משוכנת ב-S_3, שהיא חבורה מסדר 6 ולכן איזומורפית אליה. את סריג תת־החבורות של S_3 קל למצוא, ובעזרתו (והתאמת גלואה) נמצא את סריג תת־השדות



ג. יהי ρ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 7. אז כמו בכיתה, נקבל $E = \mathbb{Q}(\rho)$ והממד הוא $[E : \mathbb{Q}] = 6$. כמו כן יש איבר בחבורת גלואה שמקיים $\varphi(\rho) = \rho^2$. זה איבר מסדר 6 כי

$$\varphi^6(\rho) = \rho^{64} = \rho = \mathrm{id}(\rho)$$

וזו החזקה הכי נמוכה שזה קורה. לכן חבורת גלואה היא $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
בזמן פרסום הפתרון, אתם כבר יודעים כי $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho), \mathbb{Q}) \cong U_7 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. החבורה פועלת טרנזיטיבית על השורשים $\rho, \rho^2, \ldots, \rho^6$. נסמן ב-$\varphi_k$ את האיבר בחבורת גלואה שמקיים

$$\varphi_k(\rho) = \rho^k$$

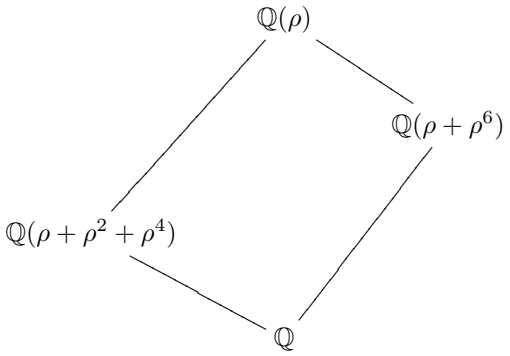
וראינו כי $\varphi_k \mapsto k$ הוא איזומורפיזם של חבורות. לחבורה $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ יש בדיוק שתי תת־חבורות לא טריוויאליות, שאיזומורפיות ל-$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. בנוסף, האיבר $\varphi_3 \in G$ הוא יוצר (כי 3 יוצר של U_7) ולכן φ_3^2, φ_3^3 יוצרים את תת־החבורות הנוספות של G. שני שדות הביניים שאנחנו מחפשים הם $E^{\varphi_3^2}, E^{\varphi_3^3}$. נחשב

$$\varphi_3^2(\rho) = \rho^2 \qquad \varphi_3^2(\rho^2) = \rho^4 \qquad \varphi_3^2(\rho^4) = 1$$

מכאן נסיק כי $\rho + \rho^2 + \rho^4$ מיוצב על ידי φ_3^2. לכן $\mathbb{Q}(\rho + \rho^2 + \rho^4) \subseteq E^{\varphi_3^2}$ ומשיקולי ממד יש שיוויון. באופן דומה אפשר לעשות אותו חישוב עבור φ_3^3 ולקבל

$$\varphi_3^3(\rho) = \rho^6 \qquad \varphi_3^3(\rho^6) = 1$$

ולכן משיקולים דומים $E^{\varphi_3^3} = \mathbb{Q}(\rho + \rho^6)$. סריג תת־השדות הוא



שאלה 3. קבעו האם ההרחבות הבאות הן נורמליות. אם לא, מצאו את הסגור הנורמלי (סגור גלואה) שלהן.

א. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

ב. $\mathbb{Q}[\rho]/\mathbb{Q}$ כאשר ρ הוא שורש יחידה מסדר 7. רמז: זה קל לפי שאלה 2.

ג. $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}(t^3)$.

פתרון.

א. ההרחבה לא נורמלית כי הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $x^3 - 2$ והשורשים הנוספים הם מרוכבים ולא שייכים לשדה.
הסגור הנורמלי הוא לספח את שאר השורשים (השורשים של הפולינום המינימלי של $\sqrt{2}$ כבר שייכים לשדה): $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho_3, \sqrt[3]{2}\rho_3^2\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \rho_3\right]$.

ב. ההרחבה היא נורמלית, כי השורשים של הפולינום המינימלי של ρ הם ρ^i שכולם שייכים לשדה. מדובר באותם חישובים כמו בסעיף השלישי בשאלה הקודמת.

ג. הפולינום המינימלי של t מעל $\mathbb{Q}(t^3)$ הוא $x^3 - t^3$ ששורשיו המרוכבים לא שייכים לשדה, ולכן ההרחבה לא נורמלית. הסגור הנורמלי הוא $\mathbb{Q}(t, \rho_3)$ כאשר ρ_3 הוא שורש יחידה מסדר 3.

שאלה 4. נסמן שורש יחידה $\rho = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ מסדר 3. חשבו את הפולינום המינימלי מעל $\mathbb{Q}$ של $2\rho + \sqrt[3]{49}$. רמז: העזרו בשאלה 2 ובפעולה של חבורת גלואה המתאימה.

פתרון. זה סיפוח של איבר אחד, ותחילה נגלה את מעלת הפולינום המינימלי שלו. כבר ראינו שחבורת גלואה של $\mathbb{Q}(\rho, \sqrt[3]{7})/\mathbb{Q}$ היא S_3. ראינו כבר בתרגול שמעלת הפולינום המינימלי היא גודל המסלול של $2\rho + \sqrt[3]{49}$ תחת הפעולה של חבורת גלואה. השורשים של $x^3 - 7$ הם $\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}\rho, \sqrt[3]{7}\rho^2$, ונסמן אותם $1, 2, 3$ בהתאמה. חבורת גלואה היא S_3 ולכן כל התמורות על קבוצת השורשים רלוונטיות. נבין מה כל תמורה עושה ל $2\rho + \sqrt[3]{49}$. שימו לב לאבחנה כי $\rho = \sqrt[3]{7}\rho / \sqrt[3]{7}$:
id מקבע את $2\rho + \sqrt[3]{49}$.
$(1\ 2)$ $\varphi_2 =$ מחליף בין $\sqrt[3]{7}$ ל-$\sqrt[3]{7}\rho$ ולכן שולח את ρ ל-$\frac{1}{\rho} = \rho^2 = -1 - \rho$. לכן

$$\varphi_2(2\rho + \sqrt[3]{49}) = 2\rho^2 + \sqrt[3]{49}\rho^2 = -2 - 2\rho - \sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{49}\rho$$

$(1\ 3)$ $\varphi_3 =$ שולח את ρ ל-ρ^2 ולכן $\varphi_3(2\rho + \sqrt[3]{49}) = 2\rho^2 + \sqrt[3]{49}\rho = -2 - 2\rho + \sqrt[3]{49}\rho$.
$(2\ 3)$ $\varphi_4 =$ שולח את ρ ל-ρ^2 ולכן $\varphi_4(2\rho + \sqrt[3]{49}) = 2\rho^2 + \sqrt[3]{49} = -2 - 2\rho + \sqrt[3]{49}$.

$\varphi_5 = (1\ 2\ 3)$ שולח את ρ ל-ρ ולכן $\varphi_5(2\rho + \sqrt[3]{49}) = 2\rho + \sqrt[3]{49}\rho^2 = 2\rho - \sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{49}\rho$.

$\varphi_6 = (1\ 3\ 2)$ שולח את ρ ל-ρ ולכן $\varphi_6(2\rho + \sqrt[3]{49}) = 2\rho + \sqrt[3]{49}\rho$.

קיבלנו שישה איברים שונים (הם שונים כי $1, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{49}, \rho, \sqrt[3]{7}\rho, \sqrt[3]{49}\rho$) הוא בסיס למרחב) ולכן המעלה של הפולינום המינימלי היא 6. הפולינום המינימלי עצמו הוא המכפלה של כל גורמים מהצורה $(x - b)$ כאשר b הוא איבר במסלול. בעזרת מחשב נחשב שהוא

$$x^6 + 6x^5 + 24x^4 - 42x^3 - 198x^2 + 684x + 3249$$

שאלה 5. תהי $E = \mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה. נניח שיש $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כך ש-$\sigma(\alpha) = \alpha^2$.

א. האם ייתכן כי $[E : \mathbb{Q}] = 2$? אם כן, מצאו α מתאים.

ב. האם ייתכן כי $[E : \mathbb{Q}] = 3$? אם כן, מצאו α מתאים.

פתרון.

א. נניח שיש שדה E כזה. זו הרחבת גלואה ולכן $|\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})| = 2$. אז $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ולכן $\alpha \neq \alpha^2$, כלומר $\sigma \neq \mathrm{id}$. בהכרח σ מסדר 2, ולכן

$$\alpha = \sigma^2(\alpha) = \sigma(\alpha^2) = \alpha^4$$

כלומר $\alpha = \alpha^4$. לכן $\alpha^3 = 1$ וקיבלנו ש-α הוא שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3. זה יתכן, כמו שראינו בכיתה שאם $E = \mathbb{Q}[\rho_3]$, אז $[E : \mathbb{Q}] = 2$.

ב. נניח שיש שדה E כזה. לכן $|\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})| = 3$. לכן σ היא מסדר 3. לכן

$$\alpha = \sigma^3(\alpha) = \alpha^8$$

כלומר $\alpha^7 = 1$. אבל אז $E = \mathbb{Q}[\rho_7]$ וראינו כי $[\mathbb{Q}[\rho_7] : \mathbb{Q}] = 6$, וזו סתירה.

שאלה 6. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק עם שדה פיצול E. נניח שחבורת גלואה $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ היא אבלית. יהי a שורש של $f(x)$.

א. הוכיחו כי $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה.

ב. הוכיחו כי $E = \mathbb{Q}(a)$.

פתרון. ניתן להחליף את $\mathbb{Q}$ בשדה אחר F, עם הדרישה שההרחבה E/F היא גלואה.

א. ההרחבה $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ היא גלואה אם ורק אם $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(a)) \leq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ היא תת־חבורה נורמלית. היא אכן נורמלית כי $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ אבלית, ולכן כל תת־חבורה שלה נורמלית.

ב. נסמן את שורשי הפולינום $f(x)$ ב-$a = a_1, \ldots, a_k$. חבורת גלואה פועלת טרנזיטיבית על קבוצת השורשים. כלומר לכל i יש $\varphi \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כך ש-$\varphi(a) = a_i$. אבל מפני ש-$\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ נורמלית אפשר לצמצם את φ ל-$\mathbb{Q}(a)$, ולכן $\varphi|_{\mathbb{Q}(a)}(a) = a_i \in \mathbb{Q}(a)$ לכל i. כלומר $\mathbb{Q}(a)$ שווה לשדה הפיצול E.

שאלה 7. יהי F שדה ממאפיין שונה מ-2, ויהי K שדה הפיצול של פולינום מתוקן ספרבילי $f(x) \in F[x]$. נסמן את שורשי $f(x)$ ב-$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. נגדיר את הדיסקרימיננטה של $f(x)$ להיות

$$\Delta(f) \coloneqq \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

א. בדקו שהדיסקרמיננטה של x^2+bx+c זה מה שאתם חושבים שזה.
להראות שהדיסקרמיננטה של $x^3+ux+v\in\mathbb{Q}[x]$ היא $-4u^3-27v^2$ זו רשות שהיא קצת יותר קשה. הדיסקרימיננטה כשמה כן היא: לפולינומים ב-$\mathbb{R}$ היא "מאבחנת" את מספר השורשים הממשיים.

ב. הוכיחו כי $\Delta(f)\in F$. רמז: חילופים ב-S_n.

ג. נתבונן ב-$G\coloneqq\mathrm{Gal}(K/F)$ כתת־חבורה של S_n, ונסמן $G_0=G\cap A_n$. הוכיחו כי $K^{G_0}=F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right]$. רמז: מה היא ההגדרה של תמורה זוגית?

ד. הסיקו כי G משוכנת ב-A_n אם ורק אם $\sqrt{\Delta(f)}\in F$.

פתרון.

א. השורשים של x^2+bx+c הם $(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2$ ולכן

$$\Delta(x^2+bx+c)=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2}\right)^2=b^2-4ac$$

ב. נראה כי $\mathrm{Gal}(K/F)\hookrightarrow S_n$ שומר על הדיסקרמיננטה. נזכר כי S_n נוצרת על ידי חילופים מהצורה $(i,i+1)$ ולכן מספיק להראות שהם שומרים על הדיסקרמיננטה.
אכן, החילוף $(i,i+1)$ שומר על כל הגורמים שאין בהם את α_i או α_{i+1}. את $(\alpha_i-\alpha_{i+1})^2$ הוא שולח ל- $(\alpha_{i+1}-\alpha_i)^2=(\alpha_i-\alpha_{i+1})^2$, ובנוסף הוא מחליף בין הגורמים $(\alpha_i-\alpha_j)^2\leftrightarrow(\alpha_{i+1}-\alpha_j)^2$ ובין הגורמים $(\alpha_j-\alpha_i)^2\leftrightarrow(\alpha_j-\alpha_{i+1})^2$.
בסך הכל S_n שומרת על המכפלה $\Delta(f)$, ולכן על חבורת גלואה, ומכאן ש-$\Delta(f)\in K^G=F$, כדרוש.

ג. לפי החישובים מהסעיף הקודם, החילוף $(i,i+1)$ שולח את $\sqrt{\Delta(f)}$ ל-$-\sqrt{\Delta(f)}$. כידוע, ניתן לכתוב כל תמורה כמכפלה של חילופים ולכן נקבל $\sigma(\sqrt{\Delta(f)})=\mathrm{sign}(\sigma)\sqrt{\Delta(f)}$. אם כן, $\sigma(\sqrt{\Delta(f)})=\sqrt{\Delta(f)}$ אם ורק אם $\mathrm{sign}(\sigma)=1$ אם ורק אם $\sigma\in A_n$.
מכאן נסיק כי $F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right]\subseteq K^{G_0}$, ומצד שני $G_0\subseteq\mathrm{Gal}\left(K/F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right]\right)$. לפי התאמת גלואה זה מוכיח את הדרוש. היה אפשר להוכיח במקום, באופן דומה לסעיף הקודם, כי $\sqrt{\Delta(f)}$ שומר על תמורות זוגיות על ידי זה שנראה כי הוא שומר על מחזורים מהצורה $(i,i+1,i+2)$ שיוצרים את A_n.

ד. לפי הסעיף הקודם והתאמת גלואה: מתקיים $G_o=G$ אם ורק אם $K^{G_0}=K^G=F$ אם ורק אם $F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right]=F$ אם ורק אם $\sqrt{\Delta(f)}\in F$.

שאלה 8 (רשות לא קשה)**.** יהיו שני פולינומים

$$f(x)=x^4-10x^2+1,\qquad g(x)=(x^2-2)(x^2-3)$$

ראינו שיש להם את אותו שדה פיצול $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. כמובן שחבורת גלואה $G=\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ פועלת על השורשים של $f(x),g(x)$. הזכרו כי השורשים של $f(x)$ הם $\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ ושל g הם $\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}$. הוכיחו כי הפעולות לא איזומורפיות.
רמז: בשפה פשוטה מבקשים להראות שלא משנה איך נמספר את השורשים, הפעולות שונות. אפשר קודם לשים לב שתת־החבורות המתאימות ב-S_4 אינן צמודות למשל.

פתרון. כבר ראינו שחבורת גלואה של הפולינומים מכילה 4 תמורות והן נקבעות לפי הפעולה על $\sqrt{2},\sqrt{3}$. נזכר שחבורת גלואה של ההרחבה היא $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. נסמן את האיברים

שלה $\{\mathrm{id}, \theta, \tau, \theta\tau\}$ כאשר

$$\theta(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \qquad \theta(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$
$$\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \qquad \tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$$

אם מסתכלים על זה כתמורות על השורשים $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ של $g(x)$. אז מתקבלות התמורות

$$\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34)$$

ואם מסתכלים על זה כתמורות על השורשים $\sqrt{2}+\sqrt{3}, -\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}-\sqrt{3}, -\sqrt{2}-\sqrt{3}$ אז מתקבלות התמורות

$$\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)$$

בשני המקרים החבורה איזומורפית ל-$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. אבל בפעולה השניה לכל איבר בחבורה חוץ מ-id אין נקודות שבת ובפעולה הראשונה זה לא נכון, ולכן הן לא איזומורפיות. אולי יותר קל לשים לב כי הפעולה הראשונה טרנזיטיבית, והשנייה לא. או לפי זה שבמקרה הראשון החבורה מכילה תמורות אי זוגיות, ואילו במקרה השני מדובר בתת־חבורה של A_4.

בהצלחה!