אלגברה מופשטת 3 – פולינומים

1. מצאו את המחלק המשותף המקסימלי של $f(x)=x^3-2x^2+1$ ו- $g(x)=x^2-x-3$ מעל $\mathbb{Q}[x]$.

2. הוכיחו: $x^3-nx+2\in\mathbb{Z}[x]$ אי פריק, עבור $n\neq -1,3,5$ מעל $\mathbb{Z}$.

3. בדקו האם הפולינומים הבאים אי-פריקים מעל $\mathbb{Q}$
   i. x^3-3x-1
   ii. x^3-7x+1
   iii. $x^4+4x^3+6x^2+2x+1$
   iv. x^4-10x^2+1

   רמז: הראו שאין לו שורשים ושאין מקדמים רציונאלים a,b,c כך ש:
   $x^4-10x^2+1=\left(a+cx+x^2\right)\left(b-cx+x^2\right)$.

4. הוכיחו: $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ אם $f(0), f(1)$ והמקדם המוביל אי-זוגיים אז ל- $f(x)$ אין שורשים ב- $\mathbb{Q}$.

5. מצאו את הפולינום המינימלי של $\alpha+3$ בהינתן שהפולינום המינימלי של α הוא x^4+9x^2+6.

6. מצאו את הפולינום המינימלי של $\sqrt{6}+\sqrt{7}$ מעל F כאשר:
   i. $F=\mathbb{Q}$.
   ii. $F=\mathbb{Q}\left[\sqrt{6}\right]$.
   iii. $F=\mathbb{Q}\left[\sqrt{42}\right]$.

7. יהיו $f(x), g(x)\in F[x]$, נסמן $n=\max\left\{\deg(f),\deg(g)\right\}$.
   אם קיימים $a_1,\ldots,a_{n+1}\in F$ שונים כך ש- $f(a_i)=g(a_i)$ לכל i, אזי $f(x)=g(x)$.
   הסיקו שאם שני פולינומים מזדהים כפונקציות על שדה אינסופי, אזי הם שווים כפולינומים.