<u>משפטים למבחן באנליזה מודרנית</u>

1. יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה.
   א. תהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה **עולה** של קבוצות מדידות. הראה ש $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
   ב. תהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה **יורדת** של קבוצות מדידות, ו $\mu(A_1) < \infty$.
   הראה ש $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

2. יהי $(X,\mathbb{A})$ מרחב מדיד. תהי f_n סדרה של פונקציות מדידות המתכנסת נקודתית לפונקציה f . הראה ש f מדידה.

3. א. נסח את משפט ההתכנסות המונוטונית ואת הלמה של פטו (Fatou).
   ב. הוכח בעזרת משפט ההתכנסות המונוטונית את הלמה של פטו.

4. א. נסח את הלמה של פטו ואת משפט ההתכנסות הנשלטת.
   ב. הוכח בעזרת הלמה של פטו את משפט ההתכנסות הנשלטת.

5. עבור $f,g\in L^1(X,\mathbb{A},\mu)$ הראה ש

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu \quad .$$

   העזר בכך שהשויון הנ"ל נכון לפונקציות אי-שליליות.

6. יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה, ותהי $f: X\to[0,\infty]$ מדידה.
   הוכח את הטענות הבאות:
   א. $\int_X f\,d\mu = 0$ אם"ם $f(x)=0$ כ.ב.מ.
   ב. אם $\int_X f\,d\mu < \infty$ אז $f(x)<\infty$ כ.ב.מ.

7. יהיו ν,μ שתי מידות על אותה σ-אלגברה, המקיימות ש ν סופית ו $\nu \ll \mu$.
   הראה שלכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל קבוצה מדידה E מתקיים שאם $\mu(E)<\delta$ אז $\nu(E)<\epsilon$.

8. תהי $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ביחס למידת לבג.
נגדיר $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ באופן הבא: $F(x) = \int_a^x f\, dm$.
הראה ש F רציפה בהחלט.

9. הוכח שפונקציה רציפה בהחלט על $[a,b]$ היא בעלת השתנות חסומה.

10. נסח והוכח את אי-שויון הולדר (Holder)

11. יהי H מרחב הילברט ותהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה אורתונורמלית של וקטורים ב H . הראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ מתכנס ב H אם"ם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ מתכנס.

12. בעזרת משפט ריס (Riesz) הוכח את הטענה הבאה:

יהיו ν, μ מידות סופיות על אותה σ-אלגברה, המקיימות $\nu \leq \mu$.
אזי קיימת פונקציה מדידה $0 \leq g \leq 1$ כך שלכל קבוצה מדידה E
מתקיים $\nu(E) = \int_E g\, d\mu$