

שיטות נומריות- תרגיל 4 - פתרון

$$1. \int_0^{\pi/4} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

מצא קירוב לאינטגרל

א. בשיטת הטריז עם 4 צעדים.

ב. בשיטת midpoint עם 4 צעדים.

ג. בשיטת simpson עם 4 צעדים.

ד. מצא את הערך האמיתי של האינטגרל.

ה. חשב את השגיאות היחסיות של סעיפים א, ב, ג. מי מהם הכי קרוב?

פתרון:

$$T_n = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b) \right]$$

א. הנוסחה בשיטת הטריז היא

$$h = \frac{\pi/4 - 0}{4} = \frac{\pi}{16}$$

שיטת טריז עם 4 צעדים, ז"א:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\pi}{32} \left[f(0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(ih) + f(\pi/4) \right] = \\ &= \frac{\pi}{32} \left[\frac{0}{\sqrt{1-0^2}} + 2 \left(\frac{(\pi/16)^2}{\sqrt{1-(\pi/16)^2}} + \frac{(\pi/8)^2}{\sqrt{1-(\pi/8)^2}} + \frac{(3\pi/16)^2}{\sqrt{1-(3\pi/16)^2}} \right) + \frac{(\pi/4)^2}{\sqrt{1-(\pi/4)^2}} \right] = \\ &= 0.2227878395 \end{aligned}$$

$$M_n = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

ב. הנוסחה עבור שיטת midpoint היא

$$h = \frac{\pi/4 - 0}{4} = \frac{\pi}{16}$$

שיטת midpoint עם 4 צעדים, ז"א:

$$M_n = \frac{\pi}{16} \left(f\left(\frac{\pi}{32}\right) + f\left(\frac{3\pi}{32}\right) + f\left(\frac{5\pi}{32}\right) + f\left(\frac{7\pi}{32}\right) \right) = 0.2016794992$$

$$S_n = \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right]$$

ג. הנוסחה עבור שיטת Simpson היא

$$h = \frac{\pi/4 - 0}{4} = \frac{\pi}{16}$$

שיטת Simpson עם 4 צעדים, ז"א:

$$M_n = \frac{\pi}{96} \left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{32}\right) + f\left(\frac{\pi}{16}\right) + 4f\left(\frac{\pi}{16}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{32}\right) + f\left(\frac{\pi}{8}\right) + \right. \\ \left. + f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4f\left(\frac{5\pi}{32}\right) + f\left(\frac{3\pi}{16}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{16}\right) + 4f\left(\frac{7\pi}{32}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 0.2098772873$$

ד. הערך האמיתי של האינטגרל:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(\begin{matrix} x = \cos(t) \\ dx = -\sin(t) dt \end{matrix} \right) = \int_{\pi/2}^{0.66} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} (-\sin(t)) dt = \int_{\pi/2}^{0.66} -\cos^2(t) dt = \\ = - \int_{\pi/2}^{0.66} \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} dt = - \left(\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right) \Big|_{\pi/2}^{0.66} = 0.2085924004$$

ה. נחשב שגיאות יחסיות:

$$6.8\% \Leftarrow \frac{0.2227878395 - 0.2085924004}{0.2085924004} = 0.0681$$

שיטת הטרפז:

$$3.3\% \Leftarrow \frac{0.2016794992 - 0.2085924004}{0.2085924004} = 0.033$$

שיטת midpoint:

$$0.62\% \Leftarrow \frac{0.2098772873 - 0.2085924004}{0.2085924004} = 0.0062$$

שיטת Simpson:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2}{1 + \cos^2 x} dx$$

2. חשב קירוב לאינטגרל עם דיוק מסדר 3

א. בשיטת גאוס.

ב. בשיטת תרבועי גאוס.

פתרון:

א. כדי למצוא דיוק מסדר 3 נדגום את הפונקציה ב-4 נקודות:

$$x_i = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$$

$$y_i = 1, 1.035, \frac{8}{7}, \frac{4}{3}$$

$$\phi_1(x) = \frac{(x - \pi/12)(x - \pi/6)(x - \pi/4)}{(0 - \pi/12)(0 - \pi/6)(0 - \pi/4)}$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x - 0)(x - \pi/6)(x - \pi/4)}{(\pi/12 - 0)(\pi/12 - \pi/6)(\pi/12 - \pi/4)}$$

$$\phi_3(x) = \frac{(x - 0)(x - \pi/12)(x - \pi/4)}{(\pi/6 - 0)(\pi/6 - \pi/12)(\pi/6 - \pi/4)}$$

$$\phi_4(x) = \frac{(x - 0)(x - \pi/12)(x - \pi/6)}{(\pi/4 - 0)(\pi/4 - \pi/12)(\pi/4 - \pi/6)}$$

$$\int_0^{\pi/4} \phi_1(x) dx = \frac{\pi}{32}$$

$$\int_0^{\pi/4} \phi_2(x) dx = \frac{3\pi}{32}$$

$$\int_0^{\pi/4} \phi_3(x) dx = \frac{3\pi}{32}$$

$$\int_0^{\pi/4} \phi_4(x) dx = \frac{\pi}{32}$$

$$\int_0^{\pi/4} f(x) dx = 1 \cdot \frac{\pi}{32} + 1.035 \cdot \frac{3\pi}{32} + \frac{8}{7} \cdot \frac{3\pi}{32} + \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{32} = 0.870405371$$

ב.נחשב ע"פ תרבועי גאוס:

כשלב ראשון, נצטרך להעביר את הפונקציה להיות בין $[-1, 1]$. ע"י החלפת המשתנים:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} = \frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8} \Rightarrow dx = \frac{\pi}{8}dt$$

$$t = \frac{8}{\pi}x - 1 \Rightarrow dt = \frac{8}{\pi}dx$$

האינטגרל החדש שנרצה לחשב:

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right)} \cdot \frac{\pi}{8} dt$$

$$f(t) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right)}$$

ולכן הפו' החדשה שלנו:

כדי לקבל דיוק מסדר 3, דרושים שני שורשים:

$$P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \quad n=2$$

פולינום לז'נדר עבור

$$t_i = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$$

לכן השורשים הם

$$f(t_i) = 0.398, 0.4722$$

הפולינומים של לג'רנז ע"פ ערכים אילו:

$$\phi_1(x) = \frac{x - \sqrt{\frac{1}{3}}}{-\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \int_{-1}^1 \phi_1(x) dx = 1$$

$$\phi_2(x) = \frac{x + \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \int_{-1}^1 \phi_2(x) dx = 1$$

לכן הקירוב לפו' המבוקשת יהיה:

$$f(x) \approx 0.398 \cdot 1 + 0.4722 \cdot 1 = 0.870294153$$

$$f(x) = x \ln(x) + e^x$$

3. נתונה הפונקציה

א.מצא את הנגזרת של הפו' וחשב את ערכה בנקודה $e+1$.

ב.מצא קירוב לנגזרת של הפו' ע"י דגימת הפו' ב-2 הנקודות 2,4

ג.חשב את הנגזרת של הפו' בנקודה $e+1$ בעזרת הקירוב הנומרי.

פתרון:

$$f'(x) = 1 + \ln(x) + e^x$$

א.

$$f'(e+1) = 1 + \ln(e+1) + e^{e+1} = 43.5068$$

ב. פולינום האינטרפולציה עבור השלשה הראשונה: 1,2,3

העיים המתאימים הם: 2.7183, 8.7754, 23.3814

$$\phi_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6)$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x^2 - 4x + 3)$$

$$\phi_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

ולכן הפולינום והנגזרת שלו עבור $1 \leq x \leq 3$ הוא :

$$\begin{aligned} P(x) &= 2.7183 * \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6) + 8.7754 * -(x^2 - 4x + 3) + 23.3814 * \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) = \\ &= 4.2722x^2 - 6.7662x + 5.2101 \\ \Rightarrow P'(x) &= 8.5488x - 6.7662 \end{aligned}$$

פולינום האינטרפולציה עבור השלשה השניה: 3,4,5

העיים המתאימים הם: 23.3814, 60.1433, 156.4603

$$\phi_1(x) = \frac{(x-4)(x-5)}{(3-4)(3-5)} = \frac{1}{2}(x^2 - 9x + 20)$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{(4-3)(4-5)} = -(x^2 - 8x + 15)$$

$$\phi_3(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(5-3)(5-4)} = \frac{1}{2}(x^2 - 7x + 12)$$

ולכן הפולינום והנגזרת שלו עבור $3 \leq x \leq 5$ הוא :

$$\begin{aligned} P(x) &= 23.3814 * \frac{1}{2}(x^2 - 9x + 20) + 60.1433 * -(x^2 - 8x + 15) + 156.4603 * \frac{1}{2}(x^2 - 7x + 12) = \\ &= 29.7775x^2 - 171.6809x + 270.4263 \\ \Rightarrow P'(x) &= 59.5550x - 171.6809 \end{aligned}$$

ג.

$$e + 1 = 3.7183$$

$3 \leq e + 1 \leq 5$ ולכן נציב ב- $P'(x)$ השני שחישובנו:

$$P'(3.7183) = 59.5550 * 3.7183 - 171.6809 = 49.7625$$