פונקציות מרוכבות
תרגיל בית מס׳ 5 - פתרון

1. היעזרו במשפט קושי כדי לחשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_C \left(e^{\cos(z)}+z^3\right)zdz$ כאשר C הוא חצי המעגל עם מרכז בראשית וברדיוס 1 המחבר את הנקודות 1 ו- -1 ומכוון נגד כיוון השעון.

ב. $\int_C \frac{1+(-iz-2)^9}{16-(-iz-2)^2}dz$ כאשר C הוא חצי המעגל עם מרכז בנקודה $2i$ וברדיוס 2 המחבר את הנקודות 0 ו- $4i$ ומכוון נגד כיוון השעון.

<u>פתרון</u>:

א.

הפונקציה $\left(e^{\cos(z)}+z^3\right)z$ היא פונקציה אנליטית ולכן ניתן להחליף את חצי המעגל בקטע הממשי המחבר את הנקודות 1 ו- 1-. לכן:

$$\int_C \left(e^{\cos(z)}+z^3\right)zdz=\int_1^{-1}\left(e^{\cos(x)}+x^3\right)xdx=-\int_{-1}^{1}\left(e^{\cos(x)}+x^3\right)xdx=-\int_{-1}^{1}xe^{\cos(x)}dx-\int_{-1}^{1}x^4dx=-\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1}=-\frac{2}{5}$$

הערה: $xe^{\cos(x)}$ - פונקציה אי זוגית ולכן $\int_{-1}^{1}xe^{\cos(x)}dx=0$.

ב.

גם בקרה זה נחליף את חצי המעגל בישר המחבר את הנקודות 0 ו- $4i$. נשים לב שאפשר להשתמש בישר זה שכן האינטגרנד לא אנליטי רק בנודות z שמקיימות $16-(-iz-2)^2=0$, כלומר בנקודות $z=6i,-2i$ אולם הנקודות האלו נמצאות מחוץ לתחום שמוקף ע״י המעגל והישר שבחרנו. לכן נסמן $z=iy$, $0\le y\le 4$ ונקבל:

$$\int_C \frac{1+(-iz-2)^9}{16-(-iz-2)^2}dz=\int_0^4\frac{1+(-i(iy)-2)^9}{16-(-i(iy)-2)^2}idy=i\int_0^4\frac{1+(y-2)^9}{16-(y-2)^2}dy.$$

נעשה החלפת משתנים $x=y-2$ ונקבל:

$$i\int_0^4\frac{1+(y-2)^9}{16-(y-2)^2}dy=i\int_{-2}^{2}\frac{1+x^9}{16-x^2}dx=i\int_{-2}^{2}\frac{x^9}{16-x^2}dx+i\int_{-2}^{2}\frac{1}{16-x^2}dx=i\int_{-2}^{2}\frac{1}{16-x^2}dx=$$

$$=\frac{i}{8}\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{4+x}\right)dx=\frac{i}{8}\left(-\ln(4-x)+\ln(4+x)\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{i\ln 3}{4}.$$

2. חשב את האינטגרל: $\int_C \frac{\sin \pi(z+1)+\cos \pi z}{(z-1)(z-2)}dz$, $C:|z|=4$.

<u>פתרון</u>:

$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$, אז

$I=\int_C \frac{\sin \pi(z+1)+\cos \pi z}{(z-1)(z-2)}dz=\int_C \frac{\sin \pi(z+1)+\cos \pi z}{(z-2)}dz-\int_C \frac{\sin \pi(z+1)+\cos \pi z}{(z-1)}dz$ על סמך נוסחת

אינטגרל של קושי $\int_C \frac{\sin \pi(z+1)+\cos \pi z}{(z-1)}dz=2\pi i[\sin \pi(z+1)+\cos \pi z]_{z=1}=-2\pi i$,

$\int_C \frac{\sin \pi(z+1)+\cos \pi z}{(z-2)}dz=2\pi i[\sin \pi(z+1)+\cos \pi z]_{z=2}=2\pi i$ מפני ששתי נקודות סינגולריות נמצאות

בתוך המעגל $C:|z|=4$ ופונקציה $f(z)=\sin \pi(z+1)+\cos \pi z$ היא אנליטית בתוכו.

3. יהי γ עקום סגור ותהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתוך ועל γ . אם הנקודה z_0 אינה נמצאת על γ , הוכיחו כי

$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}dz=\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$.

<u>פתרון</u>:

יהי γ עקום סגור, ותהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתוך ועל העקום γ . לכן גם $f'(z)$ אנליטית על ובתוך התחום.

אם z_0 מחוץ לתחום אז שתי הפונקציות $\frac{f'(z)}{z-z_0},\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$ אנליטיות על ובתוך, לכן:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0}=0=\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2} .$$

אם z_0 בתוך התחום, אז לפי נוסחאות קושי עבור הפונקציות f' ו- f בהתאמה נקבל:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0}=2\pi i f'(z_0)$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{1+1}}=\frac{2\pi i}{1!}f'(z_0)=2\pi i f'(z_0)$$

ושוב קיבלנו שוויון.

4. חשב את האינטגרל: $\int_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}dz$.

א. $C:|z+2-i|=3$

ב. $C:|z-i|=2$

ג. $C:|z+i|=1$

<u>פתרון</u>:

א.

בתוך המעגל בעל רדיוס 3 ומרכזו $z_0=-2+i$ הפונקציה לאינטגרציה היא אנליטית פרט לנקודות $a_1=-2$ ו- $a_2=i$. נחשב

$$I_4=\int_{|z+2|=1}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}=\int_{|z+2|=1}\frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}dz}{z+2}=2\pi i\frac{e^z}{(z-i)^2}\bigg|_{z=-2}=\frac{2\pi e^{-2}}{25}(4+3i)$$

ניתן לראות ש-

$$I_1=\oint_{|z+2-i|=3}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}=\oint_{|z+2|=1}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}+\oint_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}=I_4+I_2=\frac{2\pi i\left[e^{-2}+e^i(1+i)\right]}{(2+i)^2}$$

ב.

בתוך המעגל בעל רדיוס 2 ומרכזו $z_0=i$ הפונקציה לאינטגרציה היא אנליטית פרט לנקודה $a=i$. אז:

$$I_2=\int_{|z-i|=2}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}=\int_{|z-i|=2}\frac{\frac{e^z}{z+2}dz}{(z-i)^2}=2\pi i\left(\frac{e^z}{z+2}\right)'\bigg|_{z=i}=2\pi i\frac{e^z(1+z)}{(z+2)^2}\bigg|_{z=i}=\frac{2\pi i e^i(1+i)}{(2+i)^2}$$

ג.

בתוך מסלול האינטגרציה הפונקציה $\frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}$ אנליטית אז $I_3=0$

5. חשב את האינטגרל: $\int_C \frac{dz}{z^4+2iz^3}$.

א. $C:|z|=3$

ב. $C:|z-2i|=1$

<u>פתרון</u>:

א.

$$I_1=\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^4+2iz^3}=\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^3(z+2i)}$$

בתוך המעגל בעל רדיוס 3 ומרכזו $z_0=0$ הפונקציה לאינטגרציה היא אנליטית פרט לנקודות $a_1=-2i$ ו-$a_2=0$.

ניתן לפרק את האינטגרל כי:

$$I_1=\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^3(z+2i)}=\oint_{|z+2i|=1}\frac{dz}{z^3(z+2i)}+\oint_{|z|=0.5}\frac{dz}{z^3(z+2i)}=I_{11}+I_{12}$$

$$I_{11}=\oint_{|z-2i|=1}\frac{dz}{z^3(z+2i)}=\oint_{|z-2i|=1}\frac{\frac{1}{z^3}dz}{z+2i}=2\pi i\left.\frac{1}{z^3}\right|_{z=-2i}=\frac{\pi}{4}$$

$$I_{12}=\oint_{|z|=0.5}\frac{dz}{z^3(z+2i)}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{1}{z+2i}dz}{z^3}=\frac{2\pi i}{2!}\left.\left(\frac{1}{z+2i}\right)''\right|_{z=0}=\pi i\left.\frac{2}{(z+2i)^3}\right|_{z=0}=-\frac{\pi}{4}$$

$$I_1=I_{11}+I_{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$$

ב.

$$I_2=\oint_{|z-2i|=1}\frac{dz}{z^4+2iz^3}=\oint_{|z-2i|=1}\frac{dz}{z^3(z+2i)}$$

בתוך המעגל בעל רדיוס 1 ומרכזו $z_0=2i$ הפונקציה לאינטגרציה היא אנליטית אז $I_2=0$

6. תהי $f(z)$ מוגדרת ע"י $f(z)=\oint_{|s|=3}\frac{3s^2+7s+1}{z-s}ds$. מצא את $f'(1+i)$.

<u>פתרון</u>:

נוסחת קושי לפונקציה היא $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{s-z}ds$

$$f(z)=\oint_{|s|=3}\frac{3s^2+7s+1}{z-s}ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|s|=3}\frac{-2\pi i(3s^2+7s+1)}{s-z}ds$$

מהביטוי נובע שבתוך התחום $|z|<3$ הפונקציה ניתן לבטא כי $f(z)=-2\pi i(3z^2+7z+1)$.

הנקודה המעניינת $z=1+i$ נמצאת בתוך התחום $|z|<3$ כי $|1+i|=\sqrt{2}<3$. אז נקבל:

$f'(z)=-2\pi i(6z+7)$ ו- $f'(1+i)=-12\pi i(1+i)-14\pi i=\pi(12-26i)$.

7. נסמן $M(r)=\max_{|z-a|=r}|f(z)|$. על ידי שימוש בנוסחת קושי, הראה כי עבור $n=0,1,2,\dots$ מתקיים:

$\dfrac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{n!}\le\dfrac{M(r)}{r^n}$.

<u>פתרון</u>:

נוסחת קושי לנגזרות היא: $\dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n f}{dz^n}(a)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$, כאשר C מסלול סגור כלשהו סביב a , המוכל כולו בתחום האנליטיות של $f(z)$. ניתן לבחור את C להיות המעגל $|z-a|=r$ עבור $r>0$ קטן מספיק, ואז $|z-a|^{n+1}=r^{n+1}$. נפעיל הערכה אינטגרלית לערך המוחלט ונקבל:

$$\left|\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dz^n}(a)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|\le\left|\frac{1}{2\pi i}\right|\oint_C\left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right||dz|=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z-a|=r}\frac{|f(z)|}{r^{n+1}}dz\le\frac{1}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{M(r)}{r^n}$$