תורת הקבוצות תרגיל בית 2

21 באוקטובר 2018

1. תהי A קבוצה שכל איבריה קבוצות. נסמן ב$\bigcup A$ את איחוד כל הקבוצות שבA. $\bigcup A=\{x|\exists B\in A:x\in B\}$. הוכיחו: A $\in$–טרנזיטיבית אמ"ם $\bigcup A\subseteq A$.
$\Leftarrow$ נניח שA $\in$ טרנזיטיבית. יהי $x\in\bigcup A$. כלומר, קיים $B\in A$ כך ש$x\in B$. לכן $x\in A$/
$\Longrightarrow$ נתון, $\bigcup A\subseteq A$. בפרט, לכל $B\in A$, $B\subseteq A$. כלומר, A $\in$ טרנזיטיבית.
2. יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ קבוצות $\in$–טרנזיטיביות. הוכיחו: $\bigcap_{i\in I}A_i$ ו$\bigcup_{i\in I}A_i$ הן קבוצות $\in$–טרנזיטיביות.
פתרון: $\cap A_i$: יהי $y\in x\in\cap A_i$. מהגדרת חיתוך, לכל i, $x\in A_i$. כל הקבוצות טרנזיטיביות, ולכן לכל i, $y\in A_i$. $\Longleftarrow y\in\cap A_i$.
$\cup A_i$: יהי $y\in x\in\cup A_i$. מהגדרת איחוד, קיים i כך ש $x\in A_i$. A_i טרנזיטיבית ולכן $y\in A_i$. $\Longleftarrow y\in\cup A_i$.
3. תהי A קבוצה. נסמן: $A_0=A$, $A_n=A_{n-1}\cup(\cup A_{n-1})$, $tc(A)=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$.
הוכיחו: $tc(A)$ היא הקבוצה ה$\in$־ טרנזיטיבית המינימלית שמכילה את A.
פתרון: ראשית, נוכיח שהיא מכילה את A.
$A=A_0\subseteq\cup A_n$.
שנית, נוכיח שהקבוצה $\in$־ טרנזיטיבית.
יהי $y\in x\in tc(A)$. $x\in tc(A)\Longleftarrow\exists n:x\in A_n\Longleftarrow y\in A_{n+1}\Longleftarrow y\in\cup A_n$
$x\in A_n\Longleftarrow x\subseteq\cup A_n\Longleftarrow y\in\cup A_n$.
כעת, נוכיח ש$tc(A)$ הוא הראשון שמקיים זאת.
תהי B קבוצה $\in$–טרנזיטיבית כך ש $A\subseteq B$. נוכיח ש $tc(A)\subseteq B$. נוכיח את זה באינדוקציה.
עבור $n=0$: נתון ש $A\subseteq B$.
נניח ש $A_n\subseteq B$. נוכיח ש $A_{n+1}\subseteq B$.
B טרנזיטיבית, ולכן $\cup A_n\subseteq B$. אזי $A_{n+1}=A_n\bigcup(\cup A_n)\subseteq B$.
4. תנו דוגמא לקבוצה $\in$־ טרנזיטיבית שאינה סודר.
פתרון: $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$. קל לראות שהיא $\in$־ טרנזיטיבית. היא אינה סודר כי $\in$ לא מהווה עבורה יחס סדר בכלל. הוא לא טרנזיטיבי: $\emptyset\in\{\emptyset\}\in\{\{\emptyset\}\}$, אבל $\emptyset\notin\{\emptyset\}$.
5. תהי $(A,<)$ קבוצה סדורה. נסמן ב$(A,<^{-1})$ את הסדר ההפוך על A. כלומר, $a<^{-1}b\iff b<a$.
תנו דוגמא לקבוצה סדורה קווית $(A,<)$ כך שהאיזומורפיזם סדר היחיד ממנה לעצמה הוא הזהות, אבל $(A,<)$ וכן $(A,<^{-1})$ לא סדורים היטב.
דוגמא:
נסמן $A=\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$, $B=\mathbb{Z}_-=\{-1,-2,-3,...\}$ על כל אחת מהקבוצות יהיה הסדר הטבעי עליה.

כעת נקח את $C=A\cup B$ עם היחס סדר על איחוד שהוגדר בתרגיל בית 1. (כל איברי B גדולים מכל איברי A). C אינה סדורה היטב, וכן C עם היחס ההפוך אינה סדורה היטב.

יהי $f:C\to C$ איזו' סדר.

נוכיח ש$f[A]=A$, וכן $f[B]=B$. ובכן, לכל איבר בA יש אינסוף איברים שגדולים ממנו, ואילו לכל איבר בB יש רק מס' סופי של איברים שגדולים ממנו. לכן איברים בA נשלחים לA ואיברים בB נשלחים לB.

קיבלנו ש$f|_A:A\to A$ היא איזו' סדר ולכן הזהות, וכן $f|_B:B\to B$ היא איזו' סדר של קבוצה שהסדר ההפוך שלה הוא סדר טוב, ולכן הזהות.

לסיכום, $f=id_C$.

6. תהי A קבוצה סדורה קווית. הוכיחו שA סדורה היטב אמ"ם כל רישא אמיתית של A סדורה היטב.

פתרון:

$\Longleftarrow$אם A סדורה היטב אז כל תת קבוצה של A סדורה היטב, ובפרט כל רישא.

$\Longrightarrow$ תהי $\emptyset\neq B\subset A$. נקח $b\in B$. אם b ראשון, סיימנו. אחרת, נסתכל על $seg(b)$. מכיוון שb לא ראשון בB נקבל ש$B\cap seg(b)\neq\emptyset$. לפי הנתון, $seg(b)$ סדורה היטב, ולכן ל $B\cap seg(b)$ יש איבר ראשון. נקרא לו c. אנחנו רוצים להוכיח שc ראשון בB. ראשית, מהבניה, אכן $c\in B$. עוד נשם לב ש$c\in seg(b)$ ולכן $c<b$. כעת, נניח שיש $x\in B$ כך ש $x<c$. בפרט, $x<b$ ולכן $x\in B\cap seg(b)$. סתירה לבחירת c.