

אלגברה מופשטת 1, העתקת הסימן

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן.

תזכורת

$$.sign(\sigma) = \prod_{i>j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \text{ הסימן של תמורה } \sigma \text{ הוא}$$

טענה

העתקת הסימן $sign : S_n \rightarrow \mathbb{C}_2$ היא הומומורפיזם.

הוכחה

תהיינה תמורות σ, τ . צריך להוכיח כי $.sign(\sigma \circ \tau) = sign(\sigma) \cdot sign(\tau)$

כעת

$$\begin{aligned} sign(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} = \prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \\ &= \left(\prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \right) \cdot \left(\prod_{i>j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \right) \end{aligned}$$

$$\prod_{i>j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} = sign(\tau) \text{ ולכן נותר להראות כי}$$

$$\prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} = sign(\sigma) \text{ נסמן } k = \max(\tau(i), \tau(j))$$

$$.m = \min(\tau(i), \tau(j)) \text{ אם } \tau(i) > \tau(j) \text{ אז}$$

$$\text{אם } \tau(i) < \tau(j) \text{ אז } \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} = \frac{\sigma(k) - \sigma(m)}{k - m}$$

$$\text{לכן בכל מצב } \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} = \frac{\sigma(m) - \sigma(k)}{m - k} = \frac{\sigma(k) - \sigma(m)}{k - m}$$

$$\text{משמע, } \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} = \frac{\sigma(k) - \sigma(m)}{k - m}$$

$$\prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} = \prod_{k>m} \frac{\sigma(k) - \sigma(m)}{k - m} = \text{sign}(\sigma)$$