מהמבחן https://math-wiki.com/images/a/a7/2088612TestB.pdf

2.א

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

אסימפטוטות אנכיות – אין כיוון שהפונקציה רציפה בכל הממשיים כהרכבה של רציפות.

משופעת מימין

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

לכן סה"כ יש אסימפטוטה $y=x$ מימין

משופעת משמאל

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$$

ולכן יש אסימפטוטה $y=-x$ משמאל.

הערה:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\neq\lim_{x\to\infty}x\cdot 1-x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\neq\lim_{x\to\infty}(1)^x$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\neq\lim_{x\to\infty}x\cdot 1-x$$

5. נתון

$$a=\int_0^4 f(x)dx$$

הביעו באמצעות a את

$$\int_0^2 f(2x)dx$$

$$\int_0^2 f(2x)dx=\begin{Bmatrix} t=2x \\ dt=2dx \\ \frac{1}{2}dt=dx \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt=\frac{a}{2}$$

ב. הפרכה:

$$f(x)=e^{-x}, g(x)=f(2x)=e^{-2x}$$

$$\int_0^x e^{-t}dt=[-e^{-t}]_0^x=1-e^{-x}$$

$$\int_0^x e^{-2t}dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}<1-e^{-x}$$

4ב

נקרב את $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$ עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

נחשב אינטגרל $\int_0^x$

$$\ln(|1+x|)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

נציב $x=\frac{1}{2}$

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$$

גודל איברים הטור יורד לאפס, הסימנים מתחלפים ולכן מדובר בטור לייבניץ.

לכן נסכום את האיברים עד ולא כולל האיבר הראשון שגודלו קטן מגודל השגיאה.

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}$$

מהמבחן https://math-wiki.com/images/4/44/19Infi2MorimBGTestA.pdf

4.ב חשבו את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^n}$$

זה נראה כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ כאשר הצבנו בו $x=-\frac{1}{2}$

זה דומה לטור הידוע ההנדסי:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$$

נגזור את שני הצדדים

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

נכפול את שני הצדדים בx

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

לבסוף נציב $x=-\frac{1}{2}$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^n}$$

5.א צ"ל פונקציה עולה ובוכה שאין לה אסימפטוטה ב$x=0$

$\sqrt{x}$

$\ln(x+1)$

קל להוכיח שהן מקיימות את הדרוש.

ב. הפרכה: הפונקציה

$$f(x)=x+\sqrt{x}>x$$

וכמובן מקיימת את תנאי השאלה.

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/8/87/1988612TestB.pdf

5. א. נתן דוגמא לשתי פונקציות כך שהנגזרתה של האחת תמיד קטנה מנגזרתה של השנייה, אך השנייה תמיד קטנה מהראשונה.

$$f=\frac{1}{e^x}>g=-\frac{1}{e^x}$$

אבל

$$f'=-\frac{1}{e^x}<g'=\frac{1}{e^x}$$

ב.

$$f'(x)>g'(x)$$

$$\int_0^1 f'(x)dx\geq\int_0^1 g'(x)dx$$

$$f(1)-f(0)\geq g(1)-g(0)$$

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/7/70/20Infi2MorimBGTestB.pdf

שאלה 5:

א. הפרכה: $f(x)=1$ היא כמובן מקיימת $f(0)\neq 0$

$$\int_0^x 1dx=x$$

$$\int_{-x}^0 1dx=x$$

ב. נתון שעבור הפונקציה הרציפה

$$\int_0^x f(t)dt=\int_{-x}^0 f(t)dt$$

כיוון שהפונקציה רציפה מותר לגזור לפי המשפט היסודי

$$f(x)\cdot 1-f(0)\cdot 0=f(0)\cdot 0-f(-x)\cdot(-1)$$

$$f(x)=f(-x)$$

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/1/13/20Infi2MorimBGTestA.pdf

5.א.

הפונקציה $f(x)=1$ כמובן מחזורית כיוון שהיא מקיימת

$$1=f(x+2\pi)=f(x)=1$$

אך למרות זאת

$$\int_0^{2\pi} 1dx=2\pi\neq 0$$

5.ב

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx$$

מספיק להוכיח כי

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx$$

כעת נבצע הזזה

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = \begin{Bmatrix} t = x + 2\pi \\ dt = dx \end{Bmatrix} = \int_{\pi}^{2\pi} f(t-2\pi)dt = \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx$$

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/8/89/1688612TestB.pdf

4. ב

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^{n+1}}$$

זה נראה קשור לטור טיילור

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

נציב $x = \frac{2}{3}$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$$

$$\frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^{n+1}}$$

המשך השאלה בדיוק כמו השאלה הדומה למעלה.

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/4/44/19Infi2MorimBGTestA.pdf

2.א

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

נקודות חשודות לאנכיות הן נקודות אי הרציפות, במקרה זה $x=0,\frac{\pi}{2}$

נחשב את הגבולות בנקודות אלה

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{0}=\begin{cases}-\infty & \text{מימין}\\ \infty & \text{משמאל}\end{cases}$$

יש אסימפטוטה אנכית ב$x=0$ משני הצדדים.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{0},L'Hopital=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin(x)}{1}=-\frac{2}{\pi}$$

לכן אין אסימפטוטה אנכית ב$x=\frac{\pi}{2}$ (בתיכון היינו קוראים לזה חור).

משופעת מימין:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\text{חסום}}{\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=0$$

לכן $y=0$ אסימפטוטה אופקית מימין.

זו גם האסימפטוטה משמאל באופן דומה, אמנם אני ממליץ לבדוק את הדברים.

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/4/44/19Infi2MorimBGTestA.pdf

1.ב

$$\int e^{2x}e^{e^x}dx=\left\{\begin{matrix}t=e^x\\ dt=e^xdx\end{matrix}\right\}=\int te^tdt=\left\{\begin{matrix}f'=e^t & g=t\\ f=e^t & g'=1\end{matrix}\right\}=te^t-\int e^tdt=te^t-e^t+C$$
$$=e^xe^{e^x}-e^{e^x}+C$$

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/b/b5/2088612TestA.pdf

4.א באופן חלקי:

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots$$

4.ב כמו כן

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

נחבר את שני הטורים ונקבל

$$e+\frac{1}{e}=2\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)$$

$$\frac{e+\frac{1}{e}}{2}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

5. א. הפרכה:

$$\int_{-1}^{1}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

$$\int_{0}^{2}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$$

ב. הוכחה:

מספיק בעצם להוכיח ש

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(-x)dx=\begin{Bmatrix}t=-x\\dt=-dx\end{Bmatrix}=-\int_{1}^{0}f(t)dt=\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}f(x)dx$$

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/f/f8/17Infi2MorimBGTestB.pdf

5. א. הפרכה:

$$f(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$$

$$f''(x)=e^{-x}>0$$

אך

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$$

ב. המשיק באפס הוא

$$y-f(0)=1(x-0)$$
$$y=x+f(0)$$

כיוון שהפונקציה מחייכת (בחיוביים), היא תמיד מעל המשיק (בחיוביים).

כיוון שהמשיק שואף לאינסוף, כך גם הפונקציה לפי חצי סנדביץ'

4.ב חשבו את $f^{(47)}(0)$ עבור הפונקציה $f(x)=e^{-2x^2}$

נפתח את הטור של האקספוננט לפונקציה בשאלה

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-2x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^nx^{2n}}{n!}=1-2x^2+2x^4-\cdots$$

המקדם של x^{47} בטור הטיילור הוא:

$$\frac{f^{(47)}(0)}{47!}=0$$

הסבר למשוואה לעיל: צד שמאל נכון לפי הנוסחא למקדמי טיילור באופן כללי, צד ימין נכון כי מצאנו את הטור הספציפי.

ולכן

$$f^{(47)}(0)=0$$

כעת מה אם היו מבקשים מאיתנו את $f^{(46)}(0)$?

המקדם של x^{46} בטור הטיילור הוא:

$$\frac{f^{(46)}(0)}{46!}=-\frac{2^{23}}{23!}$$

לכן

$$f^{(46)}(0)=-\frac{2^{23}46!}{23!}$$

מהמבחן הזה https://math-wiki.com/images/9/97/1988612TestA.pdf

5.א הפרכה:

$$\ln(x)\,,\sqrt{x}$$

אין להן אסימפטוטה אופקית כי שתי הפונקציות שואפת לאינסוף מימין.

ב. ננסח מחדש את השאלה, ללא צורך בידע באינטגרלים.
הוכיחו/הפריכו:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$$

הפרכה: $-e^{-x}$