## פתרון מבחן בפונקציות מרוכבות (שחר תשע"ו)

1. (א) נחשב חזקה כרגיל

$$(1+i)^{1-2i} = e^{(1-2i)\operatorname{Log}(1+i)} = e^{(1-2i)(\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))}$$
$$= e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}+4\pi k}e^{-2i\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)}$$

כמו שרואים בחישוב, הערך המוחלט הוא

$$e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}+4\pi k}$$

וכמובן שכאשר $k\to\infty$ אז ערך זה גם שואף ל $\infty$ וכאשר $k\to-\infty$ אז ערך זה שואף ל $0$.

(ב) נזכור ש

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

ולכן

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{z^2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-2n}$$

$$\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-2n+3}$$

הסינגולריות היחידה היא $0$ והשארית בה מתקבלת כאשר $n=2$ כלומר

$$\operatorname{Res}(\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}},0) = \frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\int_{|z|=3}\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{1}{2} = \pi i$$

2. (א) היות של $f$ יש קוטב מסדר 2 ב $z_0=0$ הטור לורן שלה בסביבת $0$ נראה:

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+\cdots$$

כאשר $a_{-2}\neq 0$. ולכן כמובן

$$\frac{f(z)}{z^2} = \frac{a_{-2}}{z^4}+\frac{a_{-1}}{z^3}+\cdots$$

$$f(z^2) = \frac{a_{-2}}{z^4}+\frac{a_{-1}}{z^2}+\cdots$$

$$f(z^2)+\frac{f(z)}{z^2}=\frac{2a_{-2}}{z^4}+\frac{a_{-1}}{z^3}+\frac{a_{-1}}{z^2}\cdots$$

ולכן יש לפונקציה זו קוטב מסדר 4 ב $z_0=0$ (שימו לב שהמקדם של $z^{-4}$ אינו 0).

(ב) ניסוח מההרצאה.

3. (א) קודם כל נבצע $z\mapsto z-1$ כדי שהקודקוד של המשולש יהיה בראשית הצירים. אחר כך נשים לב שהגזרה היא בזוית $\frac{\pi}{4}$ ולכן נבצע $z\mapsto z^4$ כדי להביא אותה לחצי מישור עליון. את חצי המישור העליון אנחנו יודעים שאפשר להעתיק על עיגול היחידה על ידי $\frac{z-i}{z+i}$.

(ב) גם $f(z)+g(z)$ ו $f(z)-g(z)$ הן פונקציות שלמות, לפי הנתון הן חסומות לכן לפי משפט ליוביל הן קבועות. עכשיו,

$$f(z)=\frac{(f(z)+g(z))+(f(z)-g(z))}{2}$$

$$g(z)=\frac{(f(z)+g(z))-(f(z)-g(z))}{2}$$

ולכן פונקציות אלה גם קבועות.

4. משפט מההרצאה.

5. גם זה ראיתם בהרצאה אבל ניתן בכל זאת את הפתרון. קודם כל נשים לב שלפי דיריכלה האינטגרל קיים ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{\epsilon}^{R}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$$

כמו כן, כרגיל

$$\int_{\epsilon}^{R}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z=\mathrm{Im}\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z$$

ולכן מספיק לחשב את צד ימין.

נרכיב מסילה $\Gamma_{\epsilon,R}$ שתלויה ב 2 פרמטרים $\epsilon,R$ כדלהלן: המסילה מכילה את הקטע $[\epsilon,R]$ חצי מעגל ברדיוס $R$ עד לנקודה $-R$ (נסמן אותו $\Delta_R$). את הקטע $[-R,-\epsilon]$ ועוד חצי מעגל ברדיוס $\epsilon$ שסוגר את המסילה (נסמן אותו $\Delta_\epsilon$). היות שבתוך המסילה $\Gamma_{\epsilon,R}$ אין לפונקציה שלנו שום סינגולריות אז

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0$$

וכמובן

$$\int\limits_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int\limits_{\Delta_R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int\limits_{\Delta_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int\limits_{\epsilon}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int\limits_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z$$

לפי למת ז'ורדן, אפשר להראות כרגיל ש

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Delta_R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0$$

ולכן מהמשוואה למעלה ניתן להסיק כי

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}(\int\limits_{\epsilon}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int\limits_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z) = -\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\Delta_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z$$

שימו לב שבמסלול שלנו הכיוון של $\Delta_\epsilon$ הוא הכיוון השלילי ולכן אם נשנה אותה לכיוון החיובי אז בעצם נקבל

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}(\int\limits_{\epsilon}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int\limits_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z) = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\Delta_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z$$

קודם נבין את צד ימין כאן. נשתמש בנוסחא הרגילה לפי פרמטריזציה על המסילה. $z = \epsilon e^{it}$ כאשר $0 \le t \le \pi$. אז $\mathrm{d}z = \epsilon i e^{it}\mathrm{d}t$

$$\int\limits_{\Delta_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{e^{i\epsilon e^{it}}}{\epsilon e^{it}}\epsilon i e^{it}\mathrm{d}t = i\int\limits_{0}^{\pi} e^{i\epsilon e^{it}}\mathrm{d}t$$

אינטואיטיבית היינו רוצים להגיד משהו בסגנון

$$\lim_{\epsilon\to 0} e^{i\epsilon e^{it}} = 1$$

ולכן טבעי לנחש ש

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{0}^{\pi} e^{i\epsilon e^{it}}\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\pi} 1\mathrm{d}t = \pi$$

נוכיח זאת בצורה מדויקת. קודם כל ננתח את הביטוי באינטגרל

$$e^{i\epsilon e^{it}} = e^{i\epsilon\cos t}e^{-\epsilon\sin t} = e^{-\epsilon\sin t}(\cos(\epsilon\cos t) + i\sin(\epsilon\cos t))$$

אנחנו טוענים שהביטוי הזה די קרוב ל $1$ עבור ערכי $\epsilon$ קטנים ובאמת

$$|e^{-\epsilon\sin t}(\cos(\epsilon\cos t) + i\sin(\epsilon\cos t)) - 1| \le |e^{-\epsilon\sin t}|(|(\cos(\epsilon\cos t) - 1| + |\sin(\epsilon\cos t))|)$$

זה כבר ביטוי ב $\mathbb{R}$. נזכור כי $t \in [0,\pi]$. עם שיקולים רגילים (למשל לשים לב שכל מיני פונקציות כאן הן מונוטוניות או במקרה הכי גרוע, לעשות חקירת פונקציות) אפשר לראות ש

$$|e^{-\epsilon \sin t}|(|(\cos(\epsilon \cos t) - 1| + |\sin(\epsilon \cos t))|) \leq e^{|\epsilon|}((\cos\epsilon - 1) + \sin\epsilon)$$

היות ש

$$e^{|\epsilon|}((\cos\epsilon - 1) + \sin\epsilon) \to 0$$

אז ברור שלכל $\alpha > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $t \in [0,\pi]$ ולכל $|\epsilon| < \delta$ מתקיים

$$|e^{i\epsilon e^{it}} - 1| < \alpha$$

אנחנו נוכיח שלכל $\alpha > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $|\epsilon| < \delta$ מתקיים

$$|\int_0^\pi e^{i\epsilon e^{it}} \mathrm{d}t - \int_0^\pi 1 \mathrm{d}t| < \alpha$$

אז ניקח $\delta > 0$ שעבורה מתקיים שלכל $|\epsilon| < \delta$ ולכל $t \in [0,\pi]$ מתקיים ש

$$|e^{i\epsilon e^{it}} - 1| < \frac{\alpha}{\pi}$$

ואז

$$|\int_0^\pi e^{i\epsilon e^{it}} \mathrm{d}t - \int_0^\pi 1 \mathrm{d}t| = |\int_0^\pi (e^{i\epsilon e^{it}} - 1) \mathrm{d}t| \leq \pi \max_{t \in [o,\pi]} |e^{i\epsilon e^{it}} - 1| \leq \alpha$$

כנדרש. אם נחזור לביטוי למעלה נגלה ש

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{R \to \infty} (\int_\epsilon^R \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z) = i\pi$$

נשווה את החלק הדמיוני בביטוי למעלה. (נשים לב שאפשר להכניס $\mathrm{Im}$ לתוך $\lim$ כי היא פונקציה רציפה ולתוך האינטגרל כי הוא אינטגרל על קטע ממשי)

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{R \to \infty} (\int_\epsilon^R \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z) = \pi$$

אבל לפי הצבה פשוטה $w = -z$ רואים ש

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z = -\int_R^\epsilon \frac{\sin w}{w} \mathrm{d}w = \int_\epsilon^R \frac{\sin w}{w} \mathrm{d}w$$

ולכן מהמשוואה הקודמת מקבלים ש

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{\epsilon}^{R}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}$$

ולכן לסיכום

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin z}{z}=\frac{\pi}{2}$$

6. (א) 1 הוא אפס מסדר כלשהוא של המונה והמכנה. נבין את הסדר. היות ש $z_0=1$ הוא אפס מסדר 1 של $\sin z$, הוא אפס מסדר 3 של $\sin^3(z-1)$.
1 הוא אפס מסדר 1 של $\operatorname{Log} z$ (הוא הרי לא מאפס את הנגזרת $\frac{1}{z}$) ולכן הוא אפס מסדר 4 של $(\operatorname{Log} z)^4$. כמו כן 1 הוא אפס מסדר 2 של $1-\cos(z-1)$, למשל לפי הפיתוח טיילור

$$1-\cos(z-1)=\frac{(z-1)^2}{2}-\frac{(z-1)^4}{4!}+\cdots$$

ולכן הוא אפס מסדר 4 של

$$(1-\cos(z-1))^2$$

לסיכום 1 הוא אפס מסדר 3 של המונה ומסדר 8 של המכנה ולכן הוא קוטב מסדר 5 של הפונקציה לפי משפט שראינו.

(ב) לפי עקרון המקסימום, ברור שהמקסימום והמינימום מתקבלים על שפת התחום. כלומר עבור $z$ עם $|z|=\frac{3}{2}$. אפשרות א' היא לעשות חישוב ישיר לפי $z=x+iy$

$$z^2+2z=x^2+2x-y^2+i(2xy+2y)$$

ואז הערך המוחלט הוא

$$(x^2+2x-y^2)^2+(2xy+2y)^2=(x^2+2x-y^2)^2+(2x+2)^2y^2$$

אפשר להציב $y^2=\frac{9}{4}-x^2$ ולקבל

$$(2x^2+2x-\frac{9}{4})^2+(4x^2+8x+4)(\frac{9}{4}-x^2)$$

אם חוקרים את הפונקציה הזאת (אחרי פישוט היא לא מסובכת כל כך) וזוכרים ש $x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ אז מגלים שיש קיצון גלובאלי רק בקצוות $x=-\frac{3}{2}$ מינימום $x=\frac{3}{2}$ מקסימום. כלומר $z=-\frac{3}{2}$ מינימום $z=\frac{3}{2}$ מקסימום.
למעשה אפשר פחות או יותר לראות את זה בביטוי המקורי כבר כי

$$3-\frac{9}{4}=|2z|-|z^2|\le|z^2+2z|\le|z^2|+|2z|\le\frac{9}{4}+3$$

שאלה הערכים שמושגים בחיתוך המעגל עם ציר $x$. קל לראות שאין נקודות אחרות בהן מושגים ערכים אלו.