פתרון תרגיל בית 8 – טופולוגיה

שאלה 1

נתבונן בשלושה תת-מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$$
$$Y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2=1\right\}$$
$$Z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1\right\}$$

ראינו בכיתה ש- Z אינו הומיאומורפי ל- X. האם Y הומיאומורפי ל- X או ל- Z?
הוכיחו את תשובתכם!

<u>פתרון</u>

עשינו הוכחות מלאות כאלה בכיתה ולכן כאן נרשום רק את הרעיון. הרעיון הוא שב- X וב- Z, הוצאת **כל** נקודה לא פוגעת בקשירותו של המרחב. עם זאת ב- Y, ישנה נקודה **אחת** שהוצאתה פוגעת בקשירות (נקודת ההשקה).

שאלה 2

תהי X קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב $(X,\tau_{cofinite})$ קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של X).

<u>פתרון</u>

אם X סופי אז הטופולוגיה הקו-סופית היא בדיוק הטופולוגיה הדיסקרטית כי כל תת-קבוצה היא סופית ולכן סגורה. (מה שאומר שגם כל תת-קבוצה פתוחה). טופולגיה זו קשירה אם ורק אם ב- X יש רק איבר אחד (אם יש יותר מאיבר אחד אז $X=\{x\}\cup(X-\{x\})$ ולכן X לא קשיר).

נראה שאם X אינסופי המרחב קשיר. אחרת, קיימת ב- X תת-קבוצה סגוחה לא טריוויאלית A.

אם A סגורה ושונה מ- X הרי ש- A סופית. אם A פתוחה ולא ריקה הרי ש- A^c סופית. מכאן $X=A\cup A^c$ סופי וזו סתירה.

מסקנה: X קשיר אם הוא אינסופי או בעל איבר אחד ולא קשיר אם הוא סופי בעל יותר מאיבר אחד.

שאלה 3

תזכורת – הישר של סורגנפריי. נסמן ב- $\mathbb{R}_\ell$ את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הבאה T:

$O \in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ (כולל איחוד ריק).

א. הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}_\ell$ הם הנקודונים.

כלומר, הראו שאם A הוא תת-מרחב בעל יותר מנקודה אחת, אזי הוא אינו קשיר.

ב. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$. כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם – הן אינן רציפות.

פתרון

א. יהי A תת-מרחב בעל יותר מנקודה אחת ונוכיח שהוא אינו קשיר. קיימות ב-A לפחות שתי נקודות שנסמנן $x,y\in A$. בה"כ נניח $x<y$. נגדיר $U=(-\infty,y)\bigcap A\ ,\ V=[y,\infty)\bigcap A$. ברור ש-$U,V$ זרות ולא ריקות (שכן $x\in U,\ y\in V$). נותר להראות שהן פתוחות בתת המרחב A.

מספיק להראות ש-$(-\infty,y),[y,\infty)$ פתוחות ב-$\mathbb{R}_\ell$. מכיוון שראינו שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה האוקלידית (הסטנדרטית) על $\mathbb{R}$, ידוע ש-$(-\infty,y)$ פתוחה. כעת, את $[y,\infty)$ ניתן להציג כ: $[y,\infty)=\bigcup_{y<c}[y,c)$ ולכן היא פתוחה כאיחוד פתוחות.

מכאן, מכיוון ש-$U\bigcup V=A$ נקבל ש-A לא קשיר.

ב. קודם כל, הוכחתם טענה כללית לפיה פונקציה קבועה בין מרחבים טופולוגיים היא רציפה. נוכיח שאלה הן כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$.

נניח בשלילה שקיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$ פונקציה רציפה שאינה קבועה.
מכיוון ש-$\mathbb{R}$ קשיר, נקבל ש-$f(\mathbb{R})$ הוא תת מרחב קשיר של $\mathbb{R}_\ell$.
הפונקציה אינה קבועה ולכן ב-$f(\mathbb{R})$ יש יותר מנקודה אחת, וזאת בסתירה לסעיף א'.

שאלה 4

הוכיחו כי $\mathbb{R}$ אינו הומאומורפי ל-$\mathbb{R}^n$ עבור $n>1$.

פתרון

נראה כי לכל $n>1$, $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל-$\mathbb{R}$. אם נזרוק נקודה מ-$\mathbb{R}$ נקבל מרחב שאינו קשיר. אמנם, עבור $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{R}-\{b\}=(-\infty,b)\cup(b,\infty)$.
לעומת זאת לכל $n>1$, אם נזרוק נקודה מ-$\mathbb{R}^n$ נקבל מרחב קשיר מסילתית ולכן קשיר.

הסבר: $\mathbb{R}^n-\{a\}$ קשיר מסילתית לכל $n>1$ ולכל $a\in\mathbb{R}^n$. נתבונן בשתי נקודות $x,y\in\mathbb{R}^n-\{a\}$. אם הקו הישר המחבר ביניהן לא עובר דרך a אז המסילה הסטנדרטית מקשרת בין x ו-y גם ב-$\mathbb{R}^n-\{a\}$.

אחרת, מכיוון ש-$n>1$ ברור שקיים ישר שונה (מהישר המחבר את x ו-y) שעובר דרך x. ניקח נקודה הנמצאת עליו ושונה מ-x ונסמנה z. ברור שהמסילה הסטנדרטית מקשרת בין x ו-z (a לא נמצאת על ישר זה). כמו כן, a לא נמצאת על הישר המחבר בין z ו-y ולכן קיימת מסילה (הסטנדרטית) המחברת בין y ל-z. אם יש מסילה ב-$\mathbb{R}^n-\{a\}$ בין x ל-y וכן מסילה בין y ל-z אז יש גם מסילה בין x ל-z (שרשור של המסילות). היחס הוא יחס שקילות ובפרט טרנזיטיבי.

כעת, אם היה קיים הומיאומורפיזם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אז גם הפונקציה המצומצמת $f|_{\mathbb{R}^n-\{a\}}:\mathbb{R}^n-\{a\}\to\mathbb{R}-\{f(a)\}$ הייתה הומיאומורפיזם. אבל כפי שתיארנו,

המרחב השמאלי קשיר ואילו הימני אינו קשיר, בסתירה לכך שהומיאומורפיזם שומר על קשירות.

<u>שאלה 5</u>

<u>תרגיל (ממבחן)</u>

יהי $A\subseteq\mathbb{R}$. הראו שאם A צפוף ב-$\mathbb{R}$ וכן $A\neq\mathbb{R}$ אז A איננו קשיר.

<u>פתרון</u>

תהי $z\in\mathbb{R}\setminus A$ נקודה במשלים.

נסמן $A_1:=(-\infty,z)\cap A,\quad A_2:=(z,\infty)\cap A$. נרצה להראות ש-$A_1,A_2$ הן פתוחות (ב-A) זרות ולא ריקות ואיחודן נותן את A.

ברור $A_1\cap A_2=\varnothing$ (כי $(-\infty,z)\cap(z,\infty)=\varnothing$) ולכן הקבוצות זרות.

A_1,A_2 הן קבוצות פתוחות ב-A על-פי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב.

A_1,A_2 לא ריקות כי A צפוף ב-$\mathbb{R}$.

מצאנו את הפירוק הדרוש, ולכן A אינו קשיר.

<u>שאלה 6</u>

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ויהי $A\subseteq X$ תת-מרחב קשיר. הוכיחו שלכל תת-מרחב $B\subseteq X$, אם $A\subseteq B\subseteq cl(A)$ אזי B קשיר.

<u>פתרון</u>

נרצה להשתמש במשפט שלפיו אם $A\subseteq B$ שני תת-מרחבים כך ש-A צפוף ב-B וגם A קשיר, אזי B קשיר.

נרצה להראות $cl_B(A)=B$. מתקיים $cl_B(A)=cl(A)\bigcap B$ וברור כי $cl(A)\bigcap B=B$. לכן A צפוף ב-B ומקבלים הדרוש.

<u>שאלה 7</u>

יהי X מ"ט ויהיו $A,B\subseteq X$. נתון כי A קשיר, B סגוחה (סגורה ופתוחה) וכן $A\bigcap B\neq\varnothing$. הוכיחו כי $A\subseteq B$.

<u>פתרון</u>

הקבוצה $A\bigcap B$ פתוחה וסגורה בתת-מרחב A (לפי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב) ומכיוון ש-$A\bigcap B\neq\varnothing$ ו-A קשיר, נקבל $A\bigcap B=A$ ולכן $A\subseteq B$.

<u>שאלה 8</u>

יהי X מ"ט ותהיינה $A,B\subseteq X$ תת-קבוצות סגורות. נניח כי התת-מרחבים $A\cup B$ ו- $A\cap B$ קשירים. הוכיחו ש- A ו- B קשירים. הדרכה: מ"ל ש-A - קשיר שכן ההוכחה ש- B קשיר סימטרית. הניחו בשלילה ש- $A=U\cup V$ כאשר U,V סגורות...

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה ש-A לא קשיר אזי קיימות U,V זרות, לא ריקות, וסגורות ב- A כך ש-$U\cup V=A$. מתקיים $(U\cap B)\cup(V\cap B)=A\cap B$ כאשר $A\cap B$ קשיר ו- $U\cap B,V\cap B$ סגורות ב- $A\cap B$ (מדוע?). בה"כ $V\cap B=A\cap B$, $U\cap B=\varnothing$.
מתקיים $A\cup B=U\cup(V\cup B)$ כאשר U זר ל- $V\cup B$ (שכן U זר ל- V ו- U זר ל- B), כמו כן $U,V\cup B$ לא ריקות. לבסוף, ניתן להסיק ש-$U,V\cup B$ סגורות ב- $A\cup B$ מכך ש U,V סגורות ב- A וכן A,B סגורות ב- X. כמובן שהפירוק $A\cup B=U\cup(V\cup B)$ סותר, לאור כל מה שציינו לעיל, את קשירות $A\cup B$.