

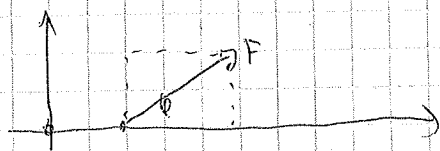
3.3.13

כוחות או אורגניזמים

הכוח

הכוח ככוח

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

ה- $\mathbb{R}^2$ ה- $\mathbb{R}^2$ ההצגה היא הביטוי המתאר את הכוח של $\vec{F}$ על $\vec{a}$ ובכיוון $\vec{a}$ 

$$W = |\vec{F}| |\vec{a}| \cos(\varphi)$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

הכוח ככוח

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

ניתן לספק כל וקטור עם קטורצ'נלות

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \end{cases}$$

נתבונן במני הוקטורים

$$\langle \vec{i}, \vec{i} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{k} \rangle = 1$$

$$\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{i} \rangle = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{i} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

נובע כי

הצורה: יהי מרחב V מעל שדה F ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) V מרחב ליניארי.

עם הסמכות ככל (חומר).

הכוח ככוח בין 2 וקטורים u, v תוצר

$$\langle u, v \rangle = \alpha \in F$$

כך שמתקיימות התכונות שלהן:

$$I) \langle u, u \rangle \geq 0$$

$$II) \langle u, u \rangle = 0 \iff u=0$$

$$III) \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$IV) \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad \alpha \in \mathbb{F}$$

$$\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle \quad \text{נכוח}$$

$$V) \langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$$

כך נעזרה המקיימת את התנאים לעיל תקרא מכסה סגורה.

תכונות של תכנים

1) האם הביטויים הבאים קצרים מרחב מכסה סגורה $[2, 2]$?

$$I) \langle f, g \rangle = \int_{-1}^2 |f+g| dt$$

נבדוק את העמידה בהקשר

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^2 |f+f| dt = 2 \int_{-1}^2 |f| dt \geq 0 \quad \text{תכונה I}$$

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_{-1}^2 |\alpha f+g| dt \neq \alpha \int_{-1}^2 |f+g| dt \quad \text{תכונה II}$$

לא מתקיימת

מסקנה: המכסה לעיל איננה סגורה.

עקביות לא קיימת. נבדוק עוד תנאים בהקשר, אוק אם נבדוק

אולי גם תכונה III לא מתקיימת.

$$II) \langle f, g \rangle = \int_{-1}^2 f \cdot \overline{g} dt + f(-\frac{1}{2}) \overline{g}(\frac{1}{2}) \quad (b)$$

נבדוק את התנאי הראשון בהקשר

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^2 f \cdot \overline{f} dt + f(\frac{1}{2}) \overline{f}(\frac{1}{2}) = \int_{-1}^2 |f|^2 dt + |f(\frac{1}{2})|^2$$

בדיקת התנאים בהקשר זוהרת כי המכסה הנ"ל אכן מכסה

סגורה.

2) גם הקשר זה עומד בקריטריון.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^2 f \cdot \overline{g} dt$$

$$\langle f, g \rangle = f(\omega) \overline{g(\omega)} + f(\omega) \overline{g(\omega)} \quad (3)$$

נבדוק את התנאים

$$\langle f, f \rangle = |f(\omega)|^2 + |f(\omega)|^2$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$f(\omega) = f(\omega) = 0 \quad \text{כי}$$

זה"נ, ההזדוה עם הכפלה כנימית בסעיף 2

נקודות גיתאסו, ולא כל הבנוקציה.

מסקנה: ההזדוה הנ"ל אינה מכילה כנימית.

(2) האם אפשר להזדוה מכילה כנימית המרחב $[-\pi, \pi]$ לבי

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \overline{g''(x)} dx + f(-\pi) \overline{g(-\pi)}$$

נבדוק את התנאים

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 dx + |f(-\pi)|^2$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f''(x) = 0 \quad \& \quad f(-\pi) = 0$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow f(x) = Ax + B$$

$$f(-\pi) = 0$$

מכיון ש- $f(x)$ ישר, התנאי לא מתקיים, וזה אינו מכילה כנימית.

$$\langle f, g \rangle = f(\omega) \overline{g(\omega)} + f'(\omega) \overline{g'(\omega)} + f(\omega) \overline{g(\omega)} \quad (3)$$

מהווה מכילה כנימית (א) המרחב (ω, ω)

$$P_2 = \text{Span} \{1, x, x^2\} \quad \text{הא. בתת-מרחב}$$

סתיון: אן לא מכילה כנימית, כי תנאי 1 לא מתקיים. (נכנס שאלה 1, בסעיף 3)

$$P_2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \quad \text{הא. כעת המרחב שלנו הוא}$$

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0 \quad \text{if} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

מסקנה: תת-המרחב המוצר, המכילה הנ"ל כן מהווה מכילה כנימית.

(4) אוצרה גבין הביטויים הבאים מהווה מכסלה כנימית 2

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) - \int_0^1 f'g' dt \quad \text{אם } f, g \in C^1([0,1]) \quad (11)$$

או מכסלה כנימית

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) - f'(1)g'(1) \quad \text{אם } f, g \in C^1([0,1]) \quad (12)$$

או מכסלה כנימית

$$\langle f, g \rangle = 2 \int_0^{1/2} f \bar{g} dt - \int_{1/2}^1 f g dt \quad (13)$$

נבדוק את הנטוים

$$\langle f, f \rangle = 2 \int_0^{1/2} |f|^2 dt - \int_{1/2}^1 |f|^2 dt$$

הטעם להראות כי המכסלה הנ"ל היא סגורה בתנאי I, II

ועל שתתקבל נגזרת, נגזרת בנקודה

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-2x} & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \sqrt{2x-1/2} & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

עבור בנקודה זו נקבל $\langle f, f \rangle \neq 0$ ולכן זו אינה מכסלה כנימית.

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= 2 \int_0^{1/2} (1-2x) dx - 4 \int_{1/2}^1 (x-1/2) dx \\ &= 2 \left(x - x^2 \right) \Big|_0^{1/2} - 4 \left(x^2 - \frac{1}{2}x \right) \Big|_{1/2}^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

המכסלה $\langle f, f \rangle = 0$ אך $f(x) \neq 0$

הצגה: נתון סכום וקטור V , $v \in V$, מרחב ליניארי, ונתונים התנאים:

I) $\|v\| \geq 0$

II) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

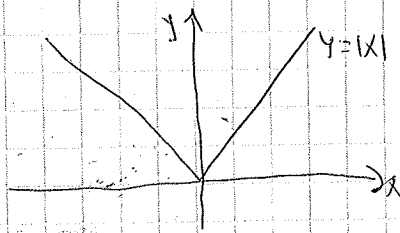
III) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

IV) $\forall x, y \in V \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

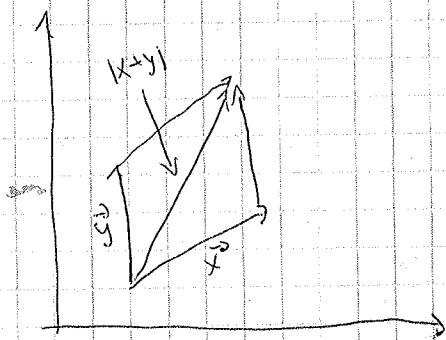
אזי הבטלה תקיף הנורמה.

מתקונן בכוונות הערך המוחלט

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



נבדוק את אי-שוויון המשולש ב- $\mathbb{R}^2$. יהיו 2 וקטורים $\vec{x}$, $\vec{y}$ ונחבר את הוקטורים כדי להקביל את וקטור את אי-שוויון המשולש.



הערה: אם נחבר מרחב ליניארי V מוזכרת מכילה כנימית, אזי המכילה הסנימית נטרה נורמה כדי

$$\|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

יש לבדוק כי ההזכרה מהזכרנו עונה על כל הדרישות של הטרימה, בעיקר התנאי של אי-שוויון המשולש.

נניח כי אכן כל מכילה כנימית נטרה עונה (עם-עצמה) ונחזור לעניין.

(3) יש להוכיח את הלהורא

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b |f(x)g(y) - g(x)f(y)|^2 dx dy &= \|f\|^2 \cdot \|g\|^2 - \langle f, g \rangle^2 \\ &= \int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - g(x)f(y)] \cdot [\overline{f(x)g(y)} - \overline{g(x)f(y)}] dx dy \\ &= \int_a^b \int_a^b [\|f(x)\|^2 \|g(y)\|^2 + \|g(x)\|^2 \|f(y)\|^2 - f(x)\overline{g(x)} \overline{f(y)}g(y) - \overline{f(x)}g(x) f(y)\overline{g(y)}] dx dy \\ &= \int_a^b \int_a^b \|f(x)\|^2 \|g(y)\|^2 dx dy + \int_a^b \|g(x)\|^2 \|f(y)\|^2 dx dy \\ &\quad - \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx \int_a^b \overline{f(y)}g(y) dy - \int_a^b \overline{f(x)}g(x) dx \int_a^b f(y)\overline{g(y)} dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum \|f\|^2 \|g\|^2 + \|g\|^2 \|f\|^2 - \cancel{\|f\|^2 \|g\|^2} = 2 | \langle f, g \rangle |^2$$

$$= \|f\|^2 \|g\|^2 - | \langle f, g \rangle |^2$$

המשפט של בורכרדט ה'נה תיכונה הטמטה, טנסמנה ק-ג

$$\|f\|^2 \|g\|^2 - | \langle f, g \rangle |^2 = \Delta$$

קבענו את אורך הטמטה של אוי-הטיין קוטי-אורל-בונאקובסקי

$$\|f\|^2 \|g\|^2 \geq | \langle f, g \rangle |^2$$

וכעת אנו יוצאים לעזריק את אורך הטמטה.

הערה: עבור מני ווקטורים ב- $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

לפי אם נתבונן במני כונקציות

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_i f(x_i) g(x_i) \xrightarrow{\text{במקרה}} \int_a^b f(x) g(x) dx$$

נחזור כעת להוכחת אוי-טיין ~~המכונה~~ קוטי-אורל-בונאקובסקי

בדרך דיולה (למרות שיש בכתרון תרגיל פ, קבענו הוכחה).

$$\|u-v\|^2 - \|u\|^2 \leq \|v\|^2 \quad \text{זה"נ, נוכח}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall u, v \in V$$

$$\begin{aligned} \|u - \lambda v\|^2 &= \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle - \lambda \langle u, v \rangle - \overline{\lambda} \langle v, u \rangle + |\lambda|^2 \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 - \lambda \langle u, v \rangle - \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

ואכיון שהטיין ~~המכונה~~ נכון לכל λ , נבחר $\lambda = \alpha \langle u, v \rangle$, כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$, ונקבל

$$\|u - \lambda v\|^2 = \|u\|^2 - 2\alpha \langle u, v \rangle^2 + \alpha^2 \|v\|^2 \langle u, v \rangle^2$$

$$A = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$$

$$B = \langle u, v \rangle^2$$

$$C = \|u\|^2$$

נסמן?

$$A^2 - 2\alpha B + C \geq 0$$

אנו קבל מניחים הנחות

$$\|u - \lambda v\|^2 \geq 0$$

כ' התחלנו ה'

נבדוק כי $A > 0, \delta < 0$ (ההקדמה של ה-ג)

$$\delta = B^2 - AC < 0$$

נב' את A, B, C

$$|\langle u, v \rangle|^2 - |\langle u, v \rangle|^2 \|v\|^2 \cdot \|u\|^2 \leq 0$$

$$|\langle u, v \rangle|^4 \leq |\langle u, v \rangle|^2 \|u\|^2 \|v\|^2$$

$$|\langle u, v \rangle|^2 (|\langle u, v \rangle|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2) \leq 0$$

$$\|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 < 0$$

לכן $\langle u, v \rangle \neq 0$

הוכחנו את אי-איות קוסי-טורל.

הקצאה

10.3.13

חזרה

הקצאה הקודמת באנו להזכיר את המושגים הבאים:

(I) מרחב מכנסה סגור

(II) נורמה

ובאנו את המושגים הבאים:

(I) אי-שייך קוטי-שורף בונטקובסקי.

(II) אי-שייך המושג (לא חובה בהקצאה הקודמת)

הוכחת אי-שייך המושג

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re} \{ \langle u, v \rangle \} + \|v\|^2 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \{ \langle u, v \rangle \} \leq |\operatorname{Re} \{ \langle u, v \rangle \}| \leq |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

↑
אי-שייך קוטי-שורף

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ \|u+v\| &\leq \|u\| + \|v\| \end{aligned}$$

המש

הזכרה נתון 2 וקטורים $u, v \in V$ נגדית מכנסה סגור.

אם $\langle u, v \rangle = 0$ אזי נאמר שהוקטורים u, v ניצבים $u \perp v$

באמצעות נתבונן הוקטור $u = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$

השקלים לקבל את הוקטור x של ציר i

$$\langle u, i \rangle = x \quad (\langle i, i \rangle = 1)$$

$$\langle u, j \rangle = y \quad (\langle j, j \rangle = 1)$$

הצורה ניתן לכתוב מכילה סכימת. אם עבור סדרה $\{u_n\}$

מתקיים עבור כל n

$$\langle u_n, u_m \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \|u_m\|^2 & n = m \end{cases}$$

אז הסדרה $\{u_n\}$ מהווה מערכת אורתוגונלית.

בזמנו: נתון פונקטור $f \in V$

אם ניתן לכתוב את f לפי הור

$$f = \sum_k a_k u_k, \quad a_k \in \mathbb{F}$$

הטורים לקבל את המקדמים a_k של u_k

$$\langle f, u_m \rangle = \langle \sum_k a_k u_k, u_m \rangle = \sum_k a_k \langle u_k, u_m \rangle = \begin{cases} \|u_m\|^2 & k=m \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$a_m = \frac{\langle f, u_m \rangle}{\|u_m\|^2}$$

מסקנה

הצורה המקדמים a_m יקראו מקדמי סדרה של f

לפי מערכת אורתוגונלית $\{u_n\}$

אם המערכת היא גם אורתונורמלית, דהיינו, מתקיים

$$\langle \hat{u}_k, \hat{u}_m \rangle = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

אזי לכל k $\|u_k\| = 1$, ונרשום את מקדמי הסדרה

$$a_m = \langle f, \hat{u}_m \rangle$$

וביטוי $f = \sum_k a_k u_k$ מהווה הצגה של f במרחב

העזרת הסדרה $\{u_n\}$

הערה הסדרה הנ"ל איננו בהכרח סופי

האור הנ"ל צריך להתכנס לפי הנורמה שהוצגה במרחב.

סקינל, הנורמה מעברת להמכסה הסכימית

(כך טענתו למעשה לצדד של אי-שייון המממש למשל שהוכחתו

נשמעת גם הנורמה כמסדרה המכילה סכימת)

צורתם: נרחבון המערכת אורתוגונלית, בקטע $[-\pi, \pi]$

$$\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$$

עם המערכת הקבוצה (הסטנדרטית)

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t)dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) dx = 0$$

$$\langle \sin(kx), \sin(mx) \rangle = \begin{cases} \pi & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

$$\langle \cos(kx), \cos(mx) \rangle = \begin{cases} \pi & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

$$\langle \cos(kx), \sin(mx) \rangle = 0$$

המערכת ק"ט אורתוגונלית.

בטורים לקבלת מערכת אורתו-נורמלית יש לנרמל את המערכת

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

אנו מציינים עם סונקציה $f(x)$ המוגדרת עם תחום $T=2\pi$

$$\int_0^T f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx \quad \text{והתקיים}$$

ולכן, נבחר בקבוצת התחום $[-\pi, \pi]$.

משפט זיורי-לבה: אם f רציפה למקומות או f טובה למר פורייה טובה

והמקוצות האי-רציפה נעלמים

$$\frac{1}{2} [f(x_+) + f(x_-)] = \sum_{k=1}^{\infty} \dots$$

צוגאבן פון שטח פון דעם

$$x = \sum_{k=1}^n x_k$$

יחיד וקטור x הניתן לפרש

נמצא הוקטורים x_k המקיימים

$$\langle x_k, x_m \rangle = \begin{cases} \|x_k\|^2 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

$$\langle x, x \rangle = x^2 = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

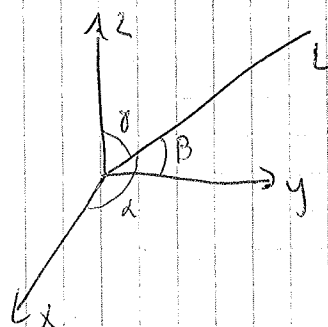
וקיבלנו את הטבלה הבאה עבור $n=2$

טבלה הטבלה הבאה עבור $n=2$

3. תרגילים 2 - מרחב מכפלה פנימית

1) מצאנו היטל של וקטור $a = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ על ציר L

היוצא עם הצירים x, y, z בזווית שוות חזית $\alpha = \beta = \gamma$?



היטל נמצא את נורמל היטל L

נתון כי הזווית שוות, $\alpha = \beta = \gamma$

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma)$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

$$3\cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$; a = \{2, 5, 1\}$$

$$P_L(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{l} \rangle$$

$\vec{a}$ היטל וקטור

על ציר L

$$\langle \vec{a}, \vec{l} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos(\theta) = |\vec{a}| \cdot \cos(\theta)$$

$$L = \{ \cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma) \} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{l} \rangle = \frac{2+1+5}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$a = (7, 2, -1)$$

$$b = (1, 2, -3)$$

$$\cos(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

כיתרון 3

$$\langle a, b \rangle = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3)$$

(2) ג'ט את הזווית בין הוקטורים

3. מצא את הזווית בין הוקטור a לוקטור b .

נניח את הוקטור b , ואז נקבע הנכסה כנימית.

הזווית הזו היא הנכסה כנימית בין הוקטור a לוקטור b (הוקטור הנכסה).

$$a = 2\hat{m} + 4\hat{n}, \quad \vec{b} = \hat{m} - \hat{n}$$

(6) ג'ט כוונת בין הוקטורים

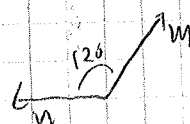
$$|\hat{m}| = |\hat{n}| = 1$$

כאשר הוקטורים $\hat{m}, \hat{n}$ יחידות

$\hat{m}$

והזווית בין הוקטורים 120°

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= (2\hat{m} + 4\hat{n}) \cdot (\hat{m} - \hat{n}) \\ &= 2\hat{m}^2 + 4\hat{n} \cdot \hat{m} - 2\hat{m} \cdot \hat{n} - 4\hat{n}^2 \\ &= 2 + 2\cos(120^\circ) - 4 \\ &= -2 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ &= -3 \end{aligned}$$



~~הוקטור a הוא~~

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sqrt{a^2} = \sqrt{(2m + 4n)^2} \\ &= \sqrt{4m^2 + 16m \cdot n + 16n^2} \\ &= \sqrt{20 - 8} \\ &= \sqrt{12} \end{aligned}$$

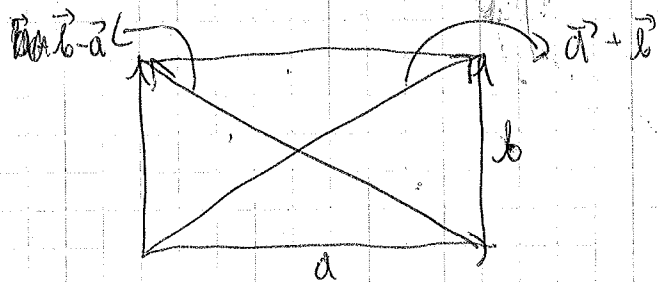
$$\begin{aligned} \|b\| &= \sqrt{b^2} = \sqrt{(m - n)^2} \\ &= \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 1} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\cos(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} = \frac{-3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{2}$$

7) הוכח כי זווית ϕ בין וקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ היא:

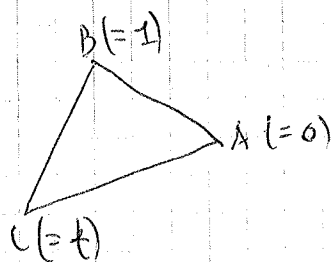
$$\cos(\phi) = \pm \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

הקיימות את השינוי



8) מצא את זווית הנשען של הקטעים הנקודות $x_1=0, x_2=1, x_3=t$ במרחב $[0,1,1]$ כאשר הנקודה הנשענת

$$\langle x, y \rangle = \int x \cdot y \, dt$$



$$AB = 1, \quad BC = t-1, \quad AC = t$$

$$\angle C \Rightarrow \frac{\langle CA, CB \rangle}{\|CA\| \|CB\|} = \frac{\langle 1-t, -t \rangle}{\|1-t\| \| -t \|}$$

10) חשב את העבודה של שדה וקטורי

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) \vec{j} + z^2 \vec{k} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$r(t) = \cos(t) \vec{i} + \sin(t) \vec{j} + 3t \vec{k} \quad \text{מאורך הסליל}$$

$$B = (2, 0, 6t) \quad \text{כאשר} \quad A = (2, 0, 0) \quad \text{הנקודה}$$

בתחום: עבודה הנעדרת כוח מוכנס בזרם, בהינתן

$$dw = Pdx + Qdy + Rdz$$

$$F = (P, Q, R) \quad dr = \{dx, dy, dz\}$$

$$W = \int_A^B dw$$

אם התקיימים התנאים

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

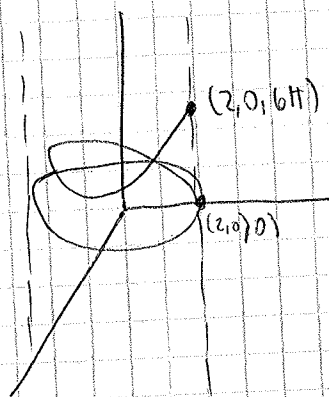
$$rot(F) = 0 \quad \text{זה"עו}$$

אזי נאמר שקיים פוטנציאל, והאינצילנד שלו תלוי בצירק
והעבודה הכללית מסלול סגור שווה ל-0.

במקרה שלנו התנאים מתקיימים

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad ; \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2} \quad ; \quad B = z^2$$

מסלול האינטגרציה (המסלול עם כיוון הכוח)
הינו לולאה קטנה, במרכז הנמצא בראש המעגל שבצירי ה- x
לפי הקבוצה קואורדינטות (x, y, z) של וקטור הכיוון $\vec{r}$.
ההתקדמות הינה בצורה ספירלית (ציר ה- z הבורג).



במקרה שלנו הי"עית נקודה סינגולרית עבור $(x, y) = (0, 0)$

מכאן P, Q לא מוגדרים.

מטרים לחשב את האינטגרל נצטרך את הקבוצה וקטור ההסתכלות הכוח.

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) & dx = -2 \sin(t) dt \\ y = 2 \sin(t) & dy = 2 \cos(t) dt \\ z = 3t & dz = 3 dt \end{cases}$$

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-2 \sin(t)}{4}$$

$$dW = F(t) dt = \int \frac{-2\sin(t)}{4} \cdot (-2\sin(t)) + \frac{2\cos(t) - 2\cos(t)}{4} + 9t^2 \cdot 3 \int$$

$$dW = \sin^2(t) + \cos^2(t) + 27t^2 = (1 + 27t^2) dt$$

$$t: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$dW = \int_0^{2\pi} dF = \int_0^{2\pi} (1 + 27t^2) dt = 2\pi + 9 \cdot 8\pi^3$$

אם לא הייתה נקודה סינגולרית

אזי היה ניתן לבצע את הכרטיס הנוטנציאל בין נקודות A ו-B

ע"י בדיקת הכרטיס הנוטנציאל בין הנקודות. (אין צורך באינטגרל)

אך מכיוון שיש נקודה סינגולרית, יש צורך לבצע את האינטגרל לאורך המסלול.