מבחן מועד ב' – מבוא לאנליזה 1 למורים – 88-611-01

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))\cdot(e^x-1)}{1-\cos(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))\cdot(e^x-1)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}=1\cdot 1\cdot 1\cdot 2=2$$

ב. $\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)}\overset{0^{\frac{1}{-\infty}}=0^0}{=}\lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(x^{\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)}\right)}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\ln(x)}}=\lim_{x\to 0^+} e=e$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$

נסמן $a_n=\frac{n}{2^n}$ נחשב את **<u>גבול</u>** המנה $\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

כיוון ש**<u>גבול</u>** המנה קטן מ1, לפי כלל המנה מתקיים כי $a_n\to 0$.

(שימו לב שמדובר בסדרה חיובית, ולכן אין צורך בערך מוחלט).

2. נביט בפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(\cos(x))+x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$? אחרת, איזה סוג אי רציפות יש ב $x=0$?

ראשית נחשב את הגבול בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos(x)\right)+x}{x}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}+1}{1}=1$$

לכן אם $a=1$ הפונקציה רציפה, ואחרת ישנה אי רציפות סליקה.

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

אם הפונקציה אינה רציפה ב $x=0$, וודאי אינה גזירה שם.

לכן נבדוק גזירות **לפי ההגדרה** ב $x=0$ כאשר $a=1$.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(\cos(h))+\mathrm{h}}{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(\cos(h))}{h^2}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-\sin(h)}{\cos(h)}}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2\cos(h)}\cdot\frac{\sin(h)}{h}=\frac{-1}{2}$$

לכן f גזירה ב $x=0$ כאשר $a=1$ והנגזרת בנקודה הינה $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

.3

א.   מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $\frac{\ln(x)}{x}$ בקטע $[1,e^2]$.

נסמן $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ ונגזור $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

כיוון שמדובר בפונקציה רציפה בקטע סגור, היא מקבלת מקסימום ומינימום בקטע.

כיוון שהפונקציה גזירה, המינימום והמקסימום מתקבלים בקצוות או בנקודות בהם הנגזרת מתאפסת.

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=e$.

נציב את כל הנקודות החשודות הללו: $1,e,e^2$ בפונקציה ונקבל את הערכים

$$f(1)=0,\ f(e)=\frac{1}{e},\ f(e^2)=\frac{2}{e^2}<\frac{e}{e^2}=\frac{1}{e}$$

לכן סה"כ הערך המקסימלי הוא $\frac{1}{e}$ והערך המינימלי הוא 0.

ב.   הוכיחו כי לכל $1<x<e$ מתקיים כי $\frac{2\ln(x)}{x}\le\frac{\ln^2(x)}{x-1}$.

יהי $1<x<e$, נפעיל משפט לאגרנז' על הפונקציה הגזירה (ולכן רציפה) $f(x)=\ln^2(x)$ בקטע $[1,x]$.

לכן קיימת נק' $1<c<x<e$ עבורה $f'(c)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, כלומר

$$\frac{\ln^2(x)}{x-1}=\frac{\ln^2(x)-\ln^2(1)}{x-1}=\frac{2\ln(c)}{c}.$$

נביט בפונקציה $h(t)=\frac{2\ln(t)}{t}$ ונגזור אותה. $h'(t)=2\frac{1-\ln(t)}{t}$ ובקטע $[1,e]$ מתקיים כי $h'(t)\ge 0$ ולכן $h(t)$ פונקציה עולה.

כיוון ש $c<x$ מתקיים כי $h(c)\le h(x)$ כלומר $\frac{2\ln(x)}{x}\le\frac{2\ln(c)}{c}$.

סה"כ ביחד $\frac{2\ln(x)}{x}\le\frac{\ln^2(x)}{x-1}$.

.4

א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ עבורה $c^3+c=1$.

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=x^3+x-1$ הרציפה בכל הממשיים.

נציב $h(0)=-1<0$, $h(1)=1>0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $0<c<1$ עבורה $h(c)=0$.

ב. הוכיחו כי c יחידה (כלומר, אין שתי נקודות שונות עבורן $x^3+x=1$).

נגזור $h'(x)=x^2+1>0$ לכן הפונקציה $h(x)$ עולה ממש, ולכן לא יכולה לחתוך את הציר יותר מפעם אחת.

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n-1}$, ותנאי ההתחלה $a_1=2$.

א. הוכיחו כי לכל n מתקיים $a_n>1$.

באינדוקציה. עבור $n=1$ מתקיים כי $a_1=2>1$. יהי n עבורו $a_n>1$ נוכיח כי $a_{n+1}>1$.

אכן, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n-1}>a_n>1$ (שימו לב כי $a_n-1>0$).

ב. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

לכל n מתקיים כי $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n-1}>0$ (האי שיוויון האחרון לפי סעיף א').

ג. מצאו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

אם הסדרה a_n חסומה היא מתכנסת כיוון שהיא מונוטונית עולה.

נסמן במקרה זה $a_n\to L\in\mathbb{R}$.

לכל n מתקיים כי $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n-1}$. נשאיף את שני הצדדים לאינסוף ונקבל כי $L=L+\frac{1}{L-1}$.

לכן $\frac{1}{L-1}=0$ סתירה.

לכן הסדרה a_n אינה חסומה, וכיוון שמדובר בסדרה מונוטונית עולה מתקיים כי $a_n\to\infty$.