מועד ב' ־ לינארית 2 מדעי המחשב (89113)

6.9.2018, כ"ו אלול תשע"ח

מרצים: ד"ר עדינה היילברון ומר אחיה בר־און
מתרגלים: מר עוזי חרוש וגב' פולינה לוצקר

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- ללא חומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.
- ניקוד מקסימאלי 105. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- הדפים האחרונים מכילים הגדרות מהקורס.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

חלק א ־ שאלות נכון/לא נכון. סמנו את התשובה הנכונה, לא נדרש נימוק בחלק זה.
כל שאלה בחלק זה שווה 5 נקודות.

1. לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה יש n ערכים עצמיים שונים.

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

2. תהא $T : V \to V$ ה"ל. אזי כל שתי מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שמייצגות את T דומות זו לזו.

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

3. לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים שאם J צורת זורדן של A אזי J^2 צורת זורדן של A^2.

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

4. יהא V מרחב מכפלה פנימית אזי כל קבוצה אורתונורמלית היא בסיס.

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

5. יהא V ממ"פ ויהיו $\{0\} \neq W \leq V$, $v \in V$. אזי ההטלה (הניצבת/האורתוגונלית) של $\pi_W(v)$ על $W^\perp$ היא וקטור האפס.

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

חלק ב ־ שאלות חישוביות ־ רשמו תשובה סופית בלבד (בחלק זה 2 שאלות).
את התשובות הסופיות רשמו בעמוד הבא שמיועד לחלק ב.
כל שאלה בחלק זה שווה 20 נקודות.

1. תהא $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(א) מצאו את הפולינום האופיני $p_A(x)$.

(ב) נסמן ב λ את הע"ע הגדול ביותר של A. מצאו בסיס למרחב העצמי שלו V_λ.

(ג) מצאו את הפולינום המינימאלי $m_A(x)$.

(ד) מצאו את צורת זורדן של A.

2. תהא $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י משפט ההגדרה:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(שימו לב כי $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$).

(א) מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_S^B$ כאשר $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הבסיס הסטנדרטי.

(ב) מצאו בסיס ל $\ker T$ ומצאו את המימד של התמונה $\dim \mathrm{Im}(T)$.

תשובות סופיות לחלק ב:

חלק ג ־ שאלות תיאורטיות. בחלק זה 3 שאלות. עליכם לענות על 2 מתוך ה 3.
סמנו בבהירות את השאלות עליהן בחרתם לענות.
כתבו את תשובתכם לחלק ג' בעמודים הבאים המוקדשים לכך (סמנו בראש העמוד את השאלה עליהם אתם עונים).
כל שאלה בחלק זה שווה 20 נקודות.

1. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות לכסינות.
   (א) הוכיחו/הפריכו: אם קיימת $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שמלכסנת את A, B בו זמנית אזי $AB = BA$.
   (ב) הוכיחו/הפריכו: AB לכסינה.
2. תהא $T : V \to V$ ויהא λ ע"ע שלו.
   (א) הוכיחו כי המרחב העצמי V_λ הוא T שמור.
   (ב) הוכיחו שההעתקה המצומצמת $S : V_\lambda \to V_\lambda$ (כלומר $\forall v \in V_\lambda : \ S(v) = Tv$) היא לכסינה.
3. יהא V מרחב מכפלה פנימית.
   (א) הוכיחו כי לכל $v_1, v_2 \in V$ שונים מאפס ושונים זה מזה מתקיים כי: $\{v_1, v_2\}$ ת"ל $\Leftrightarrow \{v_1\}^\perp = \{v_2\}^\perp$.
   (ב) תהא $T : V \to V$ אופרטור לינארי. הוכיחו/הפריכו: אם T לכסינה אזי T^* לכסינה.

בהצלחה! ☺

תשובות לחלק ג - תשובה לשאלה מספר___

תשובות לחלק ג - תשובה לשאלה מספר___

תשובות לחלק ג - תשובה לשאלה מספר___

תשובות לחלק ג ־ תשובה לשאלה מספר___

הגדרות:

- קבוצות המטריצות מגודל $m \times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$ מסומנת ב $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ או ב $\mathbb{F}^{m\times n}$ (תלוי אצל מי למדתם).
- תהא $T : V \to W$ ה"ל.
  - הגרעין מוגדר להיות $\ker T = \{v \in V : Tv = 0\}$.
  - התמונה מוגדרת להיות $\mathrm{Im}T = \{Tv : v \in V\}$.
  - T תקרא איזומורפיזם אם T חח"ע ועל.
  - T תקרא הפיכה אם קיימת ה"ל $S : W \to V$ כך ש $S \circ T = id, T \circ S = id$.
- יהיו $T : V \to W,\ S : W \to U$ שתי ה"ל. ההרכבה $S \circ T : V \to U$ היא הפונקציה המוגדרת $(S \circ T)(v) = S(T(v))$ לכל $v \in V$.
- עבור $T : V \to V$ ה"ל נסמן T^m (לכל m טבעי) את ההרכבה של T על עצמו m פעמים.
- תהא $T : V \to V$ ה"ל. ת"מ $W \leq V$ יקרא T שמור אם $Tw \in W$ לכל $w \in W$.
- תהא מטריצה$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. וקטור $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$ יקראו וקטור עצמי וערך עצמי בהתאמה אם $Av = \lambda v$. המרחב העצמי של ע"ע λ מוגדר להיות $V_\lambda = N(A - \lambda I)$
- יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ותהא $T : V \to V$ ה"ל . וקטור $0 \neq v \in V$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$ יקראו וקטור עצמי וערך עצמי בהתאמה אם $Tv = \lambda v$. המרחב העצמי של ע"ע λ מוגדר להיות $V_\lambda = \ker(T - \lambda I)$
- יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T : V \to W$ ה"ל . מטריצת מייצגת של T עם בסיסים B של V B' של W היא מטריצה $[T]^B_{B'} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ המקיימת $[T]^B_{B'}[v]_B = [Tv]_{B'}$ לכל $v \in V$.
- נתוןמטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ יקראו דומות אם קיימת מטריצה $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $P^{-1}AP = B$.
- מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא ניתנת לשילוש אם היא דומה למשולשית.
- מטריצה$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית.
- ה"ל $T : V \to V$ נקראת ניתנת ללכסון אם קיים בסיס B ל V כך ש $[T]^B_B$ אלכסונית.
- יהא פולינום $f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ ומטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הצבה של A בפולינום f היא מטריצה המוגדרת $f(A) = \sum_{i=0}^d a_i A^i$ עם המוסכמה $A^0 = I$.
- תהא מטריצה$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הפולינום האופיני שלה מוגדר להיות $p_A(x) = |xI - A| \in \mathbb{F}[x]$.
- תהא מטריצה$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הפולינום המינימאלי שלה מוגדר להיות פולינום מתוקן $0 \neq m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ המקיים כי $m_A(A) = 0$, ובנוסף, לכל פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ המקיים $p(A) = 0$ מתקיים גם $\deg m_A \leq \deg p$.
- יהא Vמ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T : V \to V$ ה"ל. הפולינום האופיני שלה מוגדר להיות $p_T(x) = |xI - A| \in \mathbb{F}[x]$ כאשר $A = [T]^B_B$ מטריצה מציינת שלה.
- יהא Vמ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T : V \to V$ ה"ל. הפולינום המינימאלי שלה מוגדר להיות פולינום מתוקן $0 \neq m_T(x) \in \mathbb{F}[x]$ המקיים כי $m_T(T) = 0$, ובנוסף, לכל פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ המקיים $p(T) = 0$ מתקיים גם $\deg m_A \leq \deg p$.
- מטריצה $J \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא בצורת זורדן אם היא מטריצת בלוקים אלכסונית כאשר כל בלוק הוא מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$.

- צורת זורדן של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא מטריצת בצורת זורדן J ש A דומה לה.
- מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא תקרא נילפוטטניטית אם קיים k טבעי כך ש $A^k = 0$.
- יהא Vמ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T : V \to V$ ה"ל. T תקרא תקרא נילפוטטניטית אם קיים k טבעי כך ש $T^k = 0$.
- יהא V מ"ו. מטריצת מעבר $[I]_{B'}^{B}$ בין בסיסים B ל B' היא המטריצה היחידה המקיימת $[I]_{B'}^{B}[v]_B = [v]_{B'}$ לכל $v \in V$.
- יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $\langle\rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ המקיימת:
  1. לינאריות ברכיב הראשון: $\langle \alpha v_1 + v_2, v\rangle = \alpha \langle v_1, v\rangle + \langle v_2, v\rangle$ לכל $v_1, v_2, v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$.
  2. הרמטיות $\langle v_1, v_2\rangle = \overline{\langle v_2, v_1\rangle}$ לכל $v_1, v_2 \in V$ (הסימון $\overline{\langle v_2, v_1\rangle}$ פירושו הצמוד המרוכב של $\langle v_2, v_1\rangle$).
  3. אי שליליות: $\mathbb{R} \ni \langle v, v\rangle \geq 0$ לכל $v \in V$. ובנוסף, לכל $v \in V$: $\langle v, v\rangle = 0$ אמ"מ $v = 0$.

  במידה ו $\langle\rangle$מ"פ על V אזי נאמר ש $(V, \langle\rangle)$מרחב מכפלה פנימית.
- יהא V מרחב מכפלה פנימית ו $S \subseteq V$ תת קבוצה. המרחב הניצב ל S מוגדר להיות $S^{\perp} = \{v \in V \mid \forall u \in S : \langle v, u\rangle = 0\}$ (כאשר $\langle\ ,\ \rangle$ היא המכפלה הפנימית).
- יהא $(V, \langle\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. יהא $V \geq W \neq 0$ ו $v \in V$ הטלה (ניצבת/אורתוגנלית) של v על W הוא וקטור המסומן $\pi_W(v) \in V$ והוא מקיים: .1 $\pi_W(v) \in W$ .2 $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$
- יהא $(V, \langle\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$.
  - הנורמה המשוריית היא פונקציה $\|\ \| : V \to \mathbb{F}$ המוגדרת $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$
  - וקטורים $v, u \in V$ יקראו אורתוגונאליים אם $\langle v, u\rangle = 0$. קבוצה $S \subseteq V$ תקרא אורתוגונאלית אם כל $v \neq u \in S$ אורתוגונאליים.
  - וקטור $v \in V$ יקרא נורמלי אם $\|v\| = 1$.
  - קבוצה $S \subseteq V$ תקרא אורתונורמלית אם S קבוצה אורתוגונאלית ובנוסף כל $v \in S$ נורמלי.
  - קבוצה $S \subseteq V$ תקרא בסיס אורתוגונאלית אם S קבוצה אורתוגונאלית וגם בסיס.
  - קבוצה $S \subseteq V$ תקרא בסיס אורתונורמלית אם S קבוצה אורתונורמלית וגם בסיס.
- פונקציונאל הוא ה"ל $\varphi : V \to \mathbb{F}$ כאשר V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$.
- יהיו V, W מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה ותהא $T : V \to W$ ה"ל. העתקה הצמודה $T^* : W \to V$ מוגדרת להיות העתקה המקיימת $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^* w\rangle$ לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$ (כאשר $\langle Tv, w\rangle$ היא המכפלה הפנימית על Wו $\langle v, T^* w\rangle$היא המכפלה הפנימית על V).
- תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נגדיר A^* להיות $\bar{A}^t$ (כאשר $\bar{A}^t$ היא הצמדת כל כניסה במושחלפת של A).
- יהיה V מרחב מכפלה פנימית ו $T : V \to V$ ה"ל.
  1. T תקרא נורמלית אם $T^*T = TT^*$.
  2. T תקרא הרמיטית אם $T^* = T$.
  3. T תקרא אוניטרית $TT^* = I$.
- תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.
  1. A תקרא נורמלית אם $A^*A = AA^*$.
  2. T תקרא הרמיטית אם $A^* = A$.
  3. T תקרא אוניטרית $AA^* = I$.