תרגול 11

תרגיל ממבחן (תשע"א):

ג. תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג, ותהי I_E האינדיקטור של E. הוכיחו שלכמעט כל $a \in E$ $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} I_E(x)\,dm = 1$ (ביחס למידת לבג)

פתרון סעיף ג:

נסתכל על הפונקציה $F_n(x) = \int_n^x 1_E\,dm$ המוגדרת לכל $x \in [n,n+1]$. ע"פ הכללת לבג למשפט היסודי חלק א', F_n גזירה כב"מ ו $F_n'(x) = I_E(x)$ כב"מ בקטע $[n,n+1]$. נסמן את הקבוצה ב $[n,n+1]\cap E$ שבה $F_n'(x) \neq I_E(x)$ ב D_n וברור כי $m(D_n)=0$. כעת, עבור כמעט כל $a \in [n,n+1]\cap E$ מתקיים

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2}\left(\frac{F_n(a+h)-F_n(a)}{h} + \frac{F_n(a)-F_n(a-h)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\left(F_n(a+h)-F_n(a-h)\right) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{2h}\int_n^{a+h} 1_E\,dm - \frac{1}{2h}\int_n^{a-h} 1_E\,dm\right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} 1_E\,dm = F_n'(a)
\end{aligned}$$

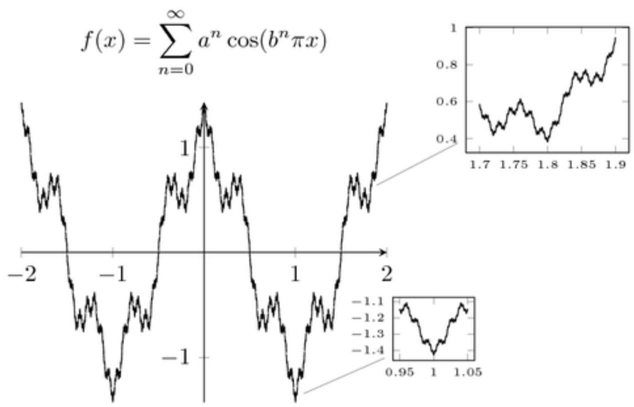
ולכן, עבור כמעט כל a מתקיים $F'(a)=1$. הקבוצה של ה a-ים ב E שעבורה $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} I_E(x)\,dm \neq 1$ לא מתקיים, מוכלת ב $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} D_n$ וכמובן ש $m\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} D_n\right)=0$ ולכן מתקיים כמעט עבור כל $a \in E$ $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} I_E(x)\,dm = 1$.

תרגיל:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. האם בהכרח קיים קטע בו f מונוטונית?

פתרון: התשובה שלילית. באינפי' בונים פונקציות רציפות שאינן גזירות בשום נקודה (למשל פונקציית ויירשטראס).

ניקח את f להיות כזו, לצורך דוגמא נגדית. אילו היה קטע $I \subseteq \mathbb{R}$ שבו f מונו', משפט הגזירה של לבג היה אומר כי f גזירה כב"מ בקטע – אך זה לא ייתכן!



<u>**הגדרה**</u>: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, אזי אם $P|[a,b]$ הינה חלוקה של הקטע $[a,b]$ ע"י הנקודות $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ מגדירים את <u>ההשתנות של f ביחס ל-P</u> ע"י $v(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$, ואת <u>ההשתנות הטוטאלית של f בקטע [a,b]</u> ע"י $T_a^b[f]=\sup\{v(f,P):P|[a,b]\}$.

<u>הגדרה</u>: אם $T_a^b[f]<\infty$ אומרים ש-f בעלת השתנות חסומה בקטע. מרחב כל הפונקציות בעלות השתנות חסומה הוא $BV([a,b])=\{f:T_a^b[f]<\infty\}$.

תרגיל: מהי ההשתנות של הפונקציה $f(x)=x$ ביחס לחלוקה $P_n|[0,1]-0=x_0,\ldots,x_i=2^{-n}i,\ldots,x_{2^n}=1$? מה ההשתנות הטוטאלית של הפונקציה?

פתרון: עפ"י הגדרה מתקיים

$$v(f,P_n)=\sum_{i=1}^{2^n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|$$
$$=\sum_{i=1}^{2^n}\left|2^{-n}i-2^{-n}(i-1)\right|=\sum_{i=1}^{2^n}2^{-n}=1$$

על מנת למצוא את ההשתנות הטוטלית נסתכל על איזושהי חלוקה $P|[0,1]-0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ ונבדוק מה ההשתנות של $f(x)$ ביחס לחלוקה זאת.
עפ"י הגדרה:

$$v(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_{i-1}\right|=\sum_{i=1}^{n}x_i-x_{i-1}=x_n-x_0=1$$

מכיוון שההשתנות אינה תלויה בחלוקה נקבל כי

$$T_0^1[f]=\sup\{v(f,P):P\,|\,[a,b]\}$$
$$=\sup\{1:P\,|\,[a,b]\}=1$$

הערה: ניתן לראות כי כל פונקציה מונוטונית(עולה או יורדת) בקטע $[a,b]$ הינה בעלת השתנות חסומה $T_a^b[f]=|f(b)-f(a)|$.

תרגיל: הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היה בעלת השתנות חסומה בקטע $[a,b]$ אמ"מ קיימות שתי פונקציות מונוטוניות בקטע $[a,b]$ f_1, f_2 כך ש $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

פתרון:

$\Rightarrow$: נניח תחילה כי קיימות שתי פונקציות מנוטוניות f_1, f_2 כך ש $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.
עפ"י הגדרה נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|f_1(x_i)-f_2(x_i)-\left(f_1(x_{i-1})-f_2(x_{i-1})\right)\right|$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|f_1(x_i)-f_1(x_{i-1})\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|f_2(x_i)-f_2(x_{i-1})\right|=\left|f_1(b)-f_1(a)\right|$$
$$+\left|f_2(b)-f_2(a)\right|<\infty$$

$\Leftarrow$: נניח כעת כי ל $f(x)$ יש התשנות חסומה. נגדיר פונקציה חדשה $S(x)=T_a^x[f]$, פונקציה זו מונוטונית עולה בקטע $[a,b]$. כמו כן, נשים לב כי $f_1(x)=\dfrac{S(x)+f(x)}{2}$ הינה פונקציה מונוטונית: אם $x_1\le x_2$ אזי מאדטיביות השתנות ($T_a^b[f]+T_b^c[f]=T_a^c[f]$)

$$\frac{S(x_2)+f(x_2)}{2}-\frac{S(x_1)+f(x_1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left[S(x_2)-S(x_1)+f(x_2)-f(x_1)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[T_{x_1}^{x_2}[f]+f(x_2)-f(x_1)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left|f(x_2)-f(x')\right|+\left|f(x')-f(x_1)\right|+f(x_2)-f(x_1)\right]\ge 0$$

באותו אופן נראה כי $f_2(x)=\dfrac{S(x)-f(x)}{2}$ הינה מונוטונית. כעת קל לראות כי $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

1. <u>תרגיל:</u> תהי $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית דיריכלה, $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=I_{\mathbb{Q}}(x)$ הוכיחו שבכל קטע $[a,b]$ (קטע עם אורך חיובי!) מתקיים $T_a^b[D]=\infty$

<u>פתרון</u>: יהי N טבעי. על סמך צפיפות הרציונליים והאי-רציונליים בקטע, נוכל לבנות חלוקה $P_N: a=x_0<x_1<\dots x_N=b$ "מתחלפת" – זאת אומרת שהנקודות הן מתחלפות בין רציונליות לאי-רציונליות לסירוגין (לפחות בלי הקצוות, שם אין לדעת). נחשב את ההשתנות:
$v(D,P_N)=\sum_{k=1}^{N}\left|D(x_k)-D(x_{k-1})\right|\geq\sum_{k=2}^{N-1}\left|D(x_k)-D(x_{k-1})\right|=\sum_{k=2}^{N-1}1=N-3$. אם כך הקבוצה $\{v(D,P):P\,|\,[a,b]\}$ מכילה מספרים גדולים כרצוננו ולכן $\sup\{v(D,P):P\,|\,[a,b]\}=\infty$.

2. <u>תרגיל:</u> הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$.

פתרון: צריכים לתפוס את התנודות של הפונקציה. $\sin\frac{1}{x}$ מחזירה $+1$ בנקודות $x_k=\frac{2}{\pi+4\pi k}$ ומחזירה -1 בנקודות $x_k=\frac{2}{3\pi+4\pi k}$. לכל N נגדיר שוב חלוקה "מתחלפת"

$$P_N:\frac{2}{\pi}>\frac{2}{3\pi}>\dots>\frac{2}{\pi+4\pi k}>\frac{2}{3\pi+4\pi k}>\dots>\frac{2}{\pi+4\pi N}>\frac{2}{3\pi+4\pi N}$$

מקבלים

$$v(f,P_N)\geq$$
$$\left|\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|+\dots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\right|+$$
$$\dots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi N\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi N\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{2}{\pi}+\frac{2}{3\pi}\right|+\dots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right|+\dots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}+\frac{2}{3\pi+4\pi N}\right|=$$
$$=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{(4k+1)(4k+3)}$$

וכאשר $N\to\infty$ מקבלים טור מתבדר. מכאן ה-sup הוא אינסוף.