פתרון תרגיל לעבודה עצמית 7

שאלה 1

1. פתור המערכות הבאות בשימוש פעולות שורה בסיסיות על המשוואות.

(א)
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 9x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(ב)
$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 10x_1 - 16x_2 + 14x_3 &= 2 \end{aligned}$$
.

2. במערכת (א) ציירו את הישרים עבור המשוואות וסמנו את נקודת החיתוך.

פתרון

1א.

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 9x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$2R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &= 4 \\ 5x_2 &= 10 \end{aligned}$$

קיבלנו מערכת מדורגת ע"י פעולת שורה בסיסית.

מהמשוואה השנייה נקבל $x_2 = 2$ ומהמשוואה הראשונה נקבל $x_1 = -10$, ולכן התשובה הסופית $(2, -10)$.

1ב.

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 10x_1 - 16x_2 + 14x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 10x_1 - 16x_2 + 14x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$-5R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ -x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 0x_2 + 0x_3 &= 11 \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה מנוונת, קבוע המשוואה שונה מאפס ולכן אין פתרון למערכת.

שאלה 2

במערכת הבאה, החלף את סימן השאלה במספר כך ש

א. למערכת יש 0 פתרונות.

ב. למערכת יש אינסוף פתרונות.

$$\begin{aligned}3x+2y&=7\\6x+4y&=?\end{aligned}$$

ג. הצב את הערך שקיבלת בסעיף ב ורשום את הפתרון הכללי של המערכת.

פתרון

$$\begin{aligned}3x+2y&=7\\6x+4y&=?\end{aligned}$$

בהינתן מערכת עם שתי משוואות בשני נעלמים $\begin{aligned}a_1x+b_1y&=c_1\\a_1x+b_1y&=c_2\end{aligned}$:

א. אם $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ אז למערכת יש 0 פתרונות.

ב. אם $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

התשובה עבור a היא כל מספר השונה מ 14 למשל 1.

התשובה עבור b היא 14.

ג. נציב את הערך שקיבלנו בסעיף קודם במערכת:

$$\begin{aligned}3x+2y&=7\\6x+4y&=14\end{aligned}$$

$$-2R_1+R_2\to R_2$$

$$\begin{aligned}3x+2y&=7\\0x+xy&=0\end{aligned}$$

כדי לקבל פתרון כללי נציב במשוואה הראשונה y=t ואז $x=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}t$.

באופן כללי הפתרון הוא: $\begin{pmatrix} \frac{7}{3} - 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>שאלה 3</u>

נתונה מערכת משוואות מעל שדה הממשיים.

$$\begin{cases} x_1 + (a-1)x_2 - x_3 = 4 \\ ax_1 + (a-1)x_2 - x_3 = a+3 \\ x_1 + (a-1)x_2 + (a-3)x_3 = 7 \end{cases} .$$

א. לאילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד?

ב. לאילו ערכים של a אין פתרון למערכת?

ג. לאילו ערכים של a יש למערכת אינסוף פתרונות? במקרה זה מצא גם את הפתרון הכללי.

<u>פתרון</u>

$$\begin{cases} x_1 + (a-1)x_2 - x_3 = 4 \\ ax_1 + (a-1)x_2 - x_3 = a+3 \\ x_1 + (a-1)x_2 + (a-3)x_3 = 7 \end{cases} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - aR_1 \to R_2} \begin{cases} x_1 + (a-1)x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + (1-a)(a-1)x_2 + (a-1)x_3 = -3(a-1) \\ 0x_1 + 0x_2 + (a-2)x_3 = 3 \end{cases}$$

פתרון יחיד: $a \neq 1, 2$.

אין פתרון: כש $a = 2$ נקבל מהמשוואה השלישית סתירה ($x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$) ולכן במצב זה אין פתרון.

אינסוף פתרונות: $a = 1$ נקבל מערכת $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + -x_3 = 3 \end{cases}$ או אם נחליף את השורות השנייה והשלישית לקבלת צורה מדורגת $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + -x_3 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$ וברור שישנם אינסוף פתרונות. המשתנה החופשי הוא x_2 כי x_1 ו- x_3 משתנים מובילים (בצורה המדורגת הם המשתנים הראשונים בשורות הראשונה והשנייה כך שהמקדמים שלהם אינם אפסים) אם נציב $x_2 = t$ נקבל שאוסף הפתרונות הוא מהצורה $\{(1, t, -3) \mid t \in R\}$.

<u>שאלה 4</u>

עבור אילו ערכי k למערכת הבאה: א. אין פתרון

ב. יש פתרון יחיד

ג. אינסוף פתרונות

$$x+2y+kz=-1$$
$$x-3z=-3$$
$$2x+ky-z=-4$$

ד. הצב את הערך שקיבלת בסעיף ג ורשום את הפתרון הכללי של המערכת.

<u>פתרון</u>

$$x+2y+kz=-1$$
$$x-3z=-3$$
$$2x+ky-z=-4$$

$$-R_1+R_2\to R_2$$

$$x+2y+kz=-1$$
$$-2y+\left(-k-3\right)z=-2$$
$$2x+ky-z=-4$$

$$-2R_1+R_3\to R_3$$

$$x+2y+kz=-1$$
$$-2y+\left(-k-3\right)z=-2$$
$$\left(-4+k\right)y+\left(-2k-1\right)z=-2$$

אם $k=4$ נקבל פתרון יחיד. כעת נבצע את הפעולה $\frac{1}{2}\cdot\left(k-4\right)R_2+R_3\to R_3$

$$x+2y+kz=-1$$
$$-2y+\left(-k-3\right)z=-2$$
$$-\frac{1}{2}\left(k+5\right)\left(k-2\right)z=2-k$$

ולכן כאשר k=-5 לא יהיה פתרון, כאשר k=2 יהייה אינסוף פתרונות למשוואה.

ובשאר המקרים נקבל פתרון יחיד.

נציב את הערך שקיהלנו הסעיף הקודם ונקבל:

$$x+2y+2z=-1$$
$$x-3z=-3$$
$$2x+2y-z=-4$$

$$-R_1+R_2 \to R_2$$

$$x+2y+2z=-1$$
$$-2y-5z=-2$$
$$2x+2y-z=-4$$

$$-2R_1+R_3 \to R_3$$

$$x+2y+2z=-1$$
$$-2y-5z=-2$$
$$-2y-5z=-2$$

$$-R_2+R_3 \to R_3$$

$$x+2y+2z=-1$$
$$-2y-5z=-2$$

נציב z=t במשוואה השנייה ונקבל $y=-\frac{5}{2}t+1$ ומהמשוואה הראשונה נקבל:

$$x=5t-2-2t-1$$
$$x=3t-3$$

הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} -3 & 3t \\ 1 & -2.5t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 5</u>

נתונה מערכת משוואות ליניארית הומוגנית של m משוואות ו n נעלמים.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

א. הוכיחו שאם $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת, אזי לכל סקלר λ גם λc הוא פתרון.

ב. הוכיחו כי אם $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), d = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ הם פתרונות של המערכת, אזי גם $c + d$ הוא פתרון של המערכת.

ג. הסיקו משני הסעיפים הקודמים כי אם $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), d = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ הם פתרונות של המערכת ו λ_1, λ_2 הם סקלרים כלשהם, אזי גם $\lambda_1 c + \lambda_2 d$ הוא פתרון של המערכת.

ד. הוכיחו או הפריכו: תכונות א,ב,ג מתקיימות גם עבור מערכת משוואות ליניארית לא הומוגנית.

__פתרון__

א. נתון ש- $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$, ולכן

מתקיים $\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_n = 0 \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{2n}\gamma_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mn}\gamma_n = 0 \end{cases}$. נכפול את כל השוויונות בסקלר λ ונקבל:

$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot \lambda\gamma_1 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \lambda\gamma_n = 0 \\ \alpha_{21} \cdot \lambda\gamma_1 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot \lambda\gamma_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot \lambda\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mn} \cdot \lambda\gamma_n = 0 \end{cases}$. אולם פירושם של השיוויונות הללו הוא שה-n-יה

$\lambda c = (\lambda\gamma_1, \ldots, \lambda\gamma_n)$ פותרת את המערכת.

ב. יהיו $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), d = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ שני פתרונות של המערכת הנתונה ולכן

מתקיימים השוויונות: $\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_n = 0 \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{2n}\gamma_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mn}\gamma_n = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha_{11}\delta_1 + \ldots + \alpha_{1n}\delta_n = 0 \\ \alpha_{21}\delta_1 + \ldots + \alpha_{2n}\delta_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\delta_1 + \ldots + \alpha_{mn}\delta_n = 0 \end{cases}$. נחבר את

שתי המערכות ונקבל: $\begin{cases} \alpha_{11}(\delta_1 + \gamma_1) + \ldots + \alpha_{1n}(\delta_n + \gamma_n) = 0 \\ \alpha_{21}(\delta_1 + \gamma_1) + \ldots + \alpha_{2n}(\delta_n + \gamma_n) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}(\delta_1 + \gamma_1) + \ldots + \alpha_{mn}(\delta_n + \gamma_n) = 0 \end{cases}$.

כלומר, ה-n-יה $c + d = (\gamma_1 + \delta_1, \ldots, \gamma_n + \delta_n)$ פותרת את המערכת.

ג. אם c,d הם פתרונות של המערכת אזי $\lambda_1 c, \lambda_2 d$ הם גם פתרונות על פי א'. אבל אז, על פי ב', גם $\lambda_1 c+\lambda_2 d$ הוא פתרון של המערכת.

ד. התכונות הללו הן נחלתן של המערכות ההומוגניות. על מנת להראות שאינן מתקיימות במערכות לא הומוגניות, מספיק להביא דוגמא נגדית:

$(1,4),(2,3)$ שניהם פתרונות של $x+y=5$ אבל $(1,4)+(2,3)=(3,7)$ אינו פתרון של המשוואה כי $3+7=10\neq 5$.

$(1,4)$ פתרון של $x+y=5$ כאמור אבל $2\cdot(1,4)=(2,8)$ אינו פתרון של משואה זו.