פתרון בוחן באנליזה 12.12.18

ענו על כל השאלות. יש לנמק כל תשובה!

רשמו שם ותעודת זהות

משך הבוחן: שעה ועשרים דקות

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

חלק ראשון- 8 שאלות כל שאלה 11 נקודות סה"כ 88 נקודות

חלק שני- 20 נקודות

ניתן לקבל לכל היותר 100 בבוחן.

ציון	
שאלה 1	
שאלה 2	
סה"כ	

בהצלחה!:)

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים (כל סעיף 11 נקודות סך הכל 88 נקודות)

פתרון

.1 $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{5n^3-1}{-n^2+5n^3}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-1}{-n^2+5n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(5-\frac{1}{n^3})}{n^3(5-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(5-\frac{1}{n^3})}{(5-\frac{1}{n})} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{5n^3-1}{-n^2+5n^3}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$$ .2

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^4\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)} + \sqrt{n^4\left(\frac{1}{n^3}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)} + n^2\sqrt{\left(\frac{1}{n^3}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{n^3}\right)}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$a_n = \frac{3^{3n}}{5^{n-1} \cdot 4^{2n}}$$ .3

$$\frac{3^{3n}}{5^{n-1} \cdot 4^{2n}} = \frac{3^{n-1} \cdot 3^{2n} \cdot 3}{5^{n-1} \cdot 4^{2n}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \cdot 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \cdot 3 = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\right) \cdot 3 = 0 \cdot 0 \cdot 3 = 0$$

$$a_n = \frac{3^n}{(3n)!}$$ .4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(3n+3)!}}{\frac{3^n}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(3n)!}{3^n(3n+3)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(3n)!}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{3}{\infty} = 0$$

ולכן לפי מבחן המנה: $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{(3n)!} = 0$

5. $a_n = \sqrt[n]{5^n + 2^n}$

נשים לב כי מתקיים:

$$5^n \le 5^n + 2^n \le 5^n + 5^n$$
$$\sqrt[n]{5^n} \le \sqrt[n]{5^n + 2^n} \le \sqrt[n]{2 \cdot 5^n}$$
$$5 \le \sqrt[n]{5^n + 2^n} \le 5 \cdot \sqrt[n]{2}$$

והרי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} 5 = 5$$
$$\lim_{n\to\infty} 5 \cdot \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 5 \cdot 1 = 5$$

ולכן לפי משפט הסנדויץ' נקבל כי :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n} = 5$$

6. $a_n = \frac{7^n}{2^{n^2}}$

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^{n+1}}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{7^n}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2} \cdot 7^{n+1}}{2^{(n+1)^2} \cdot 7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2} \cdot 7}{2^{n^2} \cdot 2^{2n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7}{2^{2n+1}} = \frac{7}{\infty} = 0$$

ולכן לפי מבחן המנה: $\lim_{n\to\infty} \frac{7^n}{2^{n^2}} = 0$

.7 $$a_n=\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{5n^2-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{5n^2-2}=\mathrm{im}_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+1}{n^2-3}\right)^{5n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{5n^2-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{5n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right]^5\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{13}$$

$$=e^5\cdot 1^{13}=e^5$$

.8 $$a_n=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$$

$$b_n=\frac{n^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\cdot n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)(n+1)^n}{n!(n+1)n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=e$$

שאלה 2

הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n - 1} \end{cases}$$

א. הוכיחו כי לכל n מתקיים: $a_n > 1$ (8 נקודות)

ב. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה (8 נקודות)

ג. מצאו את $\lim_{n\to\infty} a_n$ (4 נקודות)

פתרון

א. נוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in N$: $a_n > 1$

1. בדיקה: n=1: $a_1 = 2 > 1$ ולכן מתקיים: $a_n > 1$
2. הנחה: נניח כי עבור n מסוים מתקיים: $a_n > 1$
3. צריך להוכיח: $a_{n+1} > 1$

הוכחה: לפי נוסחת הנסיגה מתקיים: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n - 1}$

ולכן: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n - 1} > a_n > 1$

הסבר: לפי ההנחה, a_n חיובי ולכן גם $a_n - 1$ חיובי ולכן $\dfrac{1}{a_n - 1}$ חיובי ולכן מתקיים האי שיוויון.

ולכן בפרט מתקיים: $a_{n+1} > 1$ כנדרש.

ב. נוכיח כי הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית עולה:

נוכיח כי: $a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} - a_n => a_n + \frac{1}{a_n - 1} - a_n = \frac{1}{a_n - 1} > 0$$

החיובית נובע מסעיף א'.

ולכן הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית עולה.

ג.

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}-1} = L + \frac{1}{L-1}$$

$$\Rightarrow L = L + \frac{1}{L-1} \Rightarrow 0 = \frac{1}{L-1}$$

סתירה. ולכן הסדרה לא חסומה ואין לה גבול כלומר: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$