אנליזה 1 תשפב מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x^2\cos(x))}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x^2\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1} \cdot \frac{\cos(x)-1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2\cos(x)} \cdot \frac{x^2\cos(x)}{\sin(x^2\cos(x))}$$
$$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

כאשר נעזרים בכך ש $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1}$ מחושב בעזרת

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

ו $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x)}{\sin(x^2\cos(x))}$ מחושב בעזרת

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

(ב) $\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left((\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))} = e^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))\right]}$$

כעת נחשב

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\sin(x))}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{2x} = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ולכן הגבול בסה"כ שווה ל $e^{-\frac{1}{2}}$.

(ג) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!+1}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n = n! + 1$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!+1}{n!+1} = \frac{n!\left((n+1)+\frac{1}{n!}\right)}{n!\left(1+\frac{1}{n!}\right)} = \frac{(n+1)+\frac{1}{n!}}{\left(1+\frac{1}{n!}\right)} \to \infty$$

ולכן גם

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n!+1} \to \infty$$

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-e^x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-e^x}{x} = a$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-e^x}{x} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)-e^x}{1} = -1$$

ולכן רק עבור $a=-1$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=-1$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=0$) אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)-e^x}{x}-(-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-e^x+x}{x^2} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)-e^x+1}{2x} = \lim_{x\to 0} -\left[\frac{\sin(x)}{2x}+\frac{e^x-1}{2x}\right] = -\left[\frac{1}{2}\right.$$

כלומר f גזירה ב $x=0$ עבור $a=-1$ ומתקיים $f'(0)=-1$.

3. נביט בפונקציה $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$.

(א) מצאו את הערך המקסימאלי של $f(x)$.

פתרון: נגזור את הפונקציה בתחום הגדרתה

$$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

ומתקיים ש $f'(x)=0$ אם ורק אם

$$\frac{1-\ln(x)}{x^2}=0$$

אם ורק אם $1-\ln(x)=0$ והפתרון היחיד למשוואה $\ln(x)=1$ הוא $x=e$. ונסתכל בטבלה

x	e^{-2}	e	e^2
$f'(x)$	$+$	0	$-$

להסיק כי f עולה ממש בקטע $(0,e)$ ויורדת ממש בקרן (e,∞) ולכן הנקודה $x=e$ היא נקודת מקסימום יחידה והערך בה הוא

$$f(e)=\frac{1}{e}$$

(ב) לכל ערך של $a\in\mathbb{R}$, מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=a$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$g(x)=f(x)-a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה נקודות חיתוך יש ל $g(x)$ עם ציר x. כיוון ש g ו f נבדלים בקבוע יש להם אותם תחומי עליה/ירידה ואותה נקודת קיצון. לאור סעיף קודם נסיק כי ל g יכולה להיות לכל היותר נקודת חיתוך יחידה בקטע $(0,e)$ ולכל היותר נקודת חיתוך יחידה בקטע (e,∞) ואולי רק ב $g(e)$. נחשב

$$g(e)=\frac{1}{e}-a$$

ולכן עבור $a=\frac{1}{e}$ תהיה נקודת חיתוך יחידה (הנקודה e היא נקודת מקסימום ומימין ומשמאל לנקודה ערכי הפונקציה רק יותר קטנים). בנוסף לכל $a>\frac{1}{e}$ נקבל שהערך המקסימאלי של g הוא $g(e)<0$ ולכן היא לא תחתוך את ציר x באף נקודה.

עבור $a<\frac{1}{e}$ נחשב מה קורה בקצוות:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}-a=-\infty-a=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}-a=0-a=-a$$

ולכן:

- תמיד תהיה נקודת חיתוך יחידה בקטע $(0,e)$ כי $g(e)>0$ (אנחנו במקרה ש $a<\frac{1}{e}$) וקיימת נקודה $0<c<e$ בה $g(c)<0$ (כי $\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$) ומכיוון ש g פונקציה רציפה תהיה לה נקודת חיתוך עם ציר x (ויכולה להיות לכל היותר אחת כי g כולה בקטע זה ולכן יש לה בדיוק נקודה אחת).
- תהיה נקודת חיתוך יחידה בקטע (e,∞) אם ורק אם $a>0$. כי במקרה ש $a>0$ נקבל ש $g(e)>0$ (אנחנו במקרה ש $a<\frac{1}{e}$) וקיימת נקודה $e<c$ בה $g(c)<0$ (כי $\lim_{x\to\infty} g(x)=-a<0$) ומכיוון ש g פונקציה רציפה תהיה לה נקודת חיתוך עם ציר x (ויכולה להיות לכל היותר אחת כי g כולה בקטע זה ולכן יש לה בדיוק נקודה אחת). ובמקרה ש $a\le 0$ נקבל ש $\lim_{x\to\infty} g(x)\ge 0$ ומכיוון ש g יורדת ממש בקרן (e,∞) לא תהיה אף נקודה ב $g(0)$.

לסיכום:

- עבור $a=\frac{1}{e}$ יהיה פתרון יחיד.
- עבור $a>\frac{1}{e}$ לא יהיה פתרון.
- עבור $0<a<\frac{1}{e}$ יהיו שני פתרונות.
- עבור $a<0$ יהיה פתרון יחיד.

4. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n-a_n^2$ וכן $0<a_1<1$.

(א) הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $0<a_n<1$.
פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n=1$: נתון ש $0<a_1<1$.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $0<a_n<1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $0<a_{n+1}<1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1}=a_n-a_n^2=a_n\left(1-a_n\right)$$

מכיוון שההנחה היא ש $0<a_n<1$ אז גם $0<1-a_n<1$ ולכן הכפל בינהם (שזה a_{n+1}) גם הוא בין 0 ל 1.

(ב) חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
פתרון: קיבלנו בסעיף קודם שכל איברי הסדרה חיוביים ולכן חסומים על ידי 0 מלמטה. בנוסף כל איברי הסדרה קטנים מ 1 נוכל להוכיח כי הסדרה מונוטונית יורדת. הוכחה: לפי הגדרה

$$a_{n+1}=a_n-a_n^2=a_n\left(1-a_n\right)<a_n\cdot 1=a_n$$

שהרי $(1-a_n)<1$.
כיוון שהסדרה חסומה ע"י 0 ויורדת יש לסדרה גבול סופי שנסמנו L. כלומר $a_n\to L$ ולכן גם $a_{n+1}\to L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L\leftarrow a_{n+1}=a_n-a_n^2\to L-L^2$$

כלומר $L=L-L^2$. נעביר אגף ו לקבל

$$L^2=0$$

והפתרון היחיד שהוא הגבול במקרה שלנו הוא $L=0$.

5. נביט בפונקציה $f(x)=\frac{xe^x+1}{x}$.

(א) הוכיחו כי לפונקציה יש נקודת מינימום בקטע $(0,\infty)$.
פתרון: הפונקציה שלנו היא בעצם

$$f(x)=\frac{xe^x+1}{x}=e^x+\frac{1}{x}$$

נגזור את הפונקציה בקטע זה לקבל

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$$

וכעת:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x - \frac{1}{x^2} = 1 - \infty = -\infty$$
$$\lim_{x\to \infty} f'(x) = \lim_{x\to \infty} e^x - \frac{1}{x^2} = \infty - 0 = \infty$$

ולכן הפונקציה f' מקבלת ערך שלילי ומקבלת ערך חיובי. כיוון ש f' רציפה, לפי משפט ערך הביניים היא מתאפסת. נוכיח שהיא מתאפס פעם אחת בלבד: נגזור שוב

$$f''(x) = e^x + \frac{2}{x^3} > 0$$

לכל x חיובי ולכן f' עולה ממש תמיד (כי הנגזרת שלה f'' חיובית) ולכן היא מתאפסת פעם אחת לכל היותר. ביחד עם זה שהוכחנו שהיא מתאפסת נקבל שהיא מתאפסת פעם אחת בדיוק.

לסיכום f' מתאפסת פעם אחת בדיוק והיא תמיד עולה. נסמן את הנקודה בה היא מתאפסת ב c מסקנה: $f'(c) = 0$ ומשמאל לנקודה c מתקיים $f'(x) < 0$ ומימין לנקודה c מתקיים $f'(x) > 0$.

מסקנה: הפונקציה f יורדת בקטע $(0, c)$ ועולה ב (c, ∞) ולכן c היא נקודת מינימום (יחידה) של f.

(ב) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$ והוכיחו את תשובתכם.

פתרון: כיוון ש $f(x) > 0$ לכל $x > 0$ נוכיח גם ש $f(x) \neq 0$ לכל $x < 0$ וביחד נקבל שאין פתרון למשוואה $f(x) = 0$. נחקור תחילה את

$$g(x) = xe^x + 1$$

בתחום $(-\infty, 0)$. נגזור

$$g'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

שמתאפס רק עבור $x = -1$. לפי הטבלה:

x	-2	-1	-0.5
$g'(x)$	$-$	0	$+$

נסיק כי g יורדת ב $(-\infty, -1)$ ועולה ב $(-1, 0)$ ולכן ל g נקודת מינימום ב -1 וערכה הוא $g(-1) = -e^{-1} + 1 > 0$ ולכן $g > 0$ בתחום $(-\infty, 0)$. מכאן ש

$$f(x) = \frac{g(x)}{x} < 0$$

בתחום $(-\infty, 0)$ ולכן $f(x) \neq 0$ בתחום $(-\infty, 0)$.