

## בוחר ב-2 בקורס מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשפ"א

**הוראות** כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת"ז.  
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.  
משך הבוחן: 90 דקות. לאחר מכן יינתנו 15 דקות נוספות לטובת סריקת הקבצים והעלאתם למודל.  
סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.  
חומר עזר: אסור.

בהצלחה!

**שאלה 1.** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. יהי  $F$  שדה. נתבונן בחוג  $F(x)[y]$ , שהוא חוג הפולינומים במשתנה  $y$  מעל  $F(x)$ . אז  $F(x)[y]$  נותרי.

(תזכורת:  $(F(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0 \right\}$ ) (20 נקודות)

ב. יהי  $M \neq \{0\}$  מודול ציקלי מעל חוג  $R$ . אז  $M \cong R$  כמודולים מעל  $R$ . (20 נקודות)

**שאלה 2.**

א. מצאו את הפירוק של הפולינום  $f(x) = x^4 - 9x^2 + 14$  למכפלה של פולינומים אי-פריקים מעל  $\mathbb{Z}$ , והוכיחו שכל הגורמים שמצאתם אי-פריקים.

(20 נקודות)

ב. עובדה (אין צורך להוכיח): החוג  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  הוא תחום אוקלידי ביחס לפונקציית הנורמה

$$N(a + b\sqrt{-2}) = (a + b\sqrt{-2})(a - b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$$

הוכיחו שהפולינום  $g(x) = x^4 + (1 - 7\sqrt{-2})x - 11$  הוא אי-פריק מעל  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ . (20 נקודות)

**שאלה 3.** תזכורת: מודול  $M$  מעל חוג  $R$  נקרא פשוט, אם אין לו תת-מודולים לא טריוויאליים (כלומר, תת-המודולים היחידים שלו הם  $\{0\}$  ו- $M$ ).

נניח ש- $M \neq \{0\}$  מודול פשוט מעל חוג  $R$ . הוכיחו שכל הומומורפיזם של מודולים

$\varphi : M \rightarrow M$  שאינו הומומורפיזם האפס הוא איזומורפיזם.

(30 נקודות)