אנליזה 1 למורים- תרגיל 6

שאלה 1

הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n^{\ 2} \end{cases}$$

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים $0 < a_n < 1$

ב. הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת

ג. הסיקו ש- $\{a_n\}$ מתכנסת ומצאו את הגבול שלה.

פתרון

א. נוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in N$: $0 < a_n < 1$

1. בדיקה: n=1: $a_1 = \frac{1}{4}$ ולכן מתקיים: $0 < a_1 < 1$
2. הנחה: נניח כי עבור n מסוים מתקיים: $0 < a_n < 1$
3. צריך להוכיח: $0 < a_{n+1} < 1$.

הוכחה: לפי נוסחת הנסיגה מתקיים: $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n^{\ 2}$.

מהנחת האינדוקציה: $0 < a_n < 1$ ולכן $0 < a_n^{\ 2} < 1$.

אם נכפיל את שני האגפים בחצי נקבל: $0 < \frac{1}{2} \cdot a_n^{\ 2} < \frac{1}{2}$.

ולכן בפרט מתקיים: $0 < \frac{1}{2} \cdot a_n^{\ 2} < 1$ כלומר $0 < a_{n+1} < 1$ כנדרש.

ב. נוכיח כי הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת בעזרת אינדוקציה:

1. בדיקה: n=1: $a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{32} < \frac{1}{4} = a_1$
2. הנחה: נניח כי עבור n מסוים מתקיים: $a_n > a_{n+1}$
3. צריך להוכיח: $a_{n+1} > a_{n+2}$

הוכחה: $a_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot a_{n+1}^{\ 2} \overset{(1)}{<} \frac{1}{2} \cdot a_n^{\ 2} = a_{n+1}$

הסבר המעבר (1): $a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_{n+1}^{\ 2} < a_n^{\ 2}$

ולכן לפי האינדוקציה נסיק כי $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת.

ג. לפי משפט, $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת וחסומה ולכן מתכנסת. נמצא את הגבול שלה:

$$L=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot {a_{n-1}}^2=\frac{1}{2}\cdot L^2$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{2}\cdot L^2\Rightarrow 0=L\left(1-0.5L\right)$$

ולכן $L=0$ או $L=2$. אבל $0<a_n<1$ לכל n ולכן $0\le L\le 1$ ולכן נקבל כי: $L=0$

שאלה 2

הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1=\sqrt{3} \\ a_{n+1}=\sqrt{3+a_n} \end{cases}$$

א. הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית עולה

ב. הסיקו ש- $\{a_n\}$ מתכנסת ומצאו את הגבול שלה.

פתרון

א. נוכיח ע"י אינדוקציה.
בדיקה: עבור n=1:

$$a_2=\sqrt{3+a_1}=\sqrt{3+\sqrt{3}}>\sqrt{3}=a_1$$

הנחה: נניח כי עברו *n* מסויים: $a_{n+1}>a_n$
נוכיח כי זה מתקיים עברו *n+1* כלומר ש: $a_{n+2}>a_{n+1}$
הוכחה: $a_{n+2}=\sqrt{3+a_{n+1}}>\sqrt{3+a_n}=a_{n+1}$
ולכן a_n מונוטונית עולה.

ב. a_n חסומה מלמטה ע"י $\sqrt{3}$.
נוכיח שהיא חסומה מלמעלה ע"י 3 ע"י אינדוקציה.
בדיקה: עבור n=1:

$$a_1=\sqrt{3}<3$$

הנחה: נניח כי עברו *n* מסויים: $3>a_n$.
נוכיח כי זה מתקיים עברו *n+1* כלומר ש: $3>a_{n+1}$
הוכחה: $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}>3$
ולכן a_n חסומה מלמעלה ולמטה ולכן חסומה.
קיבלנו שa_n חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת. נמצא את הגבול שלה:

$$c=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3+a_n}=\sqrt{3+c}$$

ולכן: $c=\sqrt{3+c}$

$$c^2=3+c$$

$$0 = c^2 - c - 3$$
$$c = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$
הסדרה חיובית ולכן הגבול חיובי ולכן
$$c = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

<u>שאלה 3</u>

תשתמשו בנוסחה הבאה שראינו בשיעור ומצאו את הגבולות הבאים:

תהי a_n סדרה ששואפת לאינסוף אזי: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

<u>פתרון</u>

א. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right) = e^7\cdot 1 = e^7$$

ב. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{2}{n+1}\right)^{2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^2\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{-2}$$
$$= \left(e^2\right)^2\cdot 1^{-2} = e^4$$

ג. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \mathrm{im}_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right]^4\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}$$
$$= e^4\cdot 1^{11} = e^4$$