מדעי המח מד"ר תשפג מועד ב

1. מצאו פתרון למד"ר $(xy'-1)\ln(x)=2y$ המקיים $y(e)=0$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון. נעביר אגפים $y'x\ln(x)-2y=\ln(x)$. נחלק ב $x\ln(x)$ לקבל

$$y'-\frac{2}{x\ln(x)}y=\frac{1}{x}$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $b(x)=\frac{1}{x}, a(x)=-\frac{2}{x\ln(x)}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\text{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב $A(x)$:

$$A(x)=\int -\frac{2}{x\ln(x)}\text{dx}=\left\{\begin{array}{c} t=\ln(x) \\ \text{dt}=\frac{1}{x}\text{dx}\end{array}\right\}=-2\int\frac{1}{t}\text{dt}=-2\ln|\ln(x)|$$

ואז נציב

$$e^{2\ln|\ln(x)|}\left(C+\int\frac{1}{x}e^{-2\ln|\ln(x)|}\text{dx}\right)=\ln^2(x)\left(C+\int\frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\text{dx}\right)$$

נחשב

$$\int\frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\text{dx}=\left\{\begin{array}{c} t=\ln(x) \\ \text{dt}=\frac{1}{x}\text{dx}\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t^2}\text{dt}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{\ln(x)}$$

ולכן, פתרון כללי הוא

$$\begin{aligned} y(x)&=\ln^2(x)\left(C+\int\frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\text{dx}\right)\\ &=\ln^2(x)C-\ln(x)\end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה $y(e)=0$ למצוא את הקבוע C.

$$0=y(e)=\ln^2(e)C-\ln(e)=C-1$$

לכן $C=1$ והפתרון הוא

$$y(x)=\ln^2(x)-\ln(x)$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\left(1+y^2\sin(2x)\right)\mathrm{dx}-2y\cos^2(x)\mathrm{dy}=0$ המקיים $y(0)=-2$.

פתרון: נבדוק אם המד"ר מדוייקת. נסמן

$$P(x,y)=1+y^2\sin(2x)$$
$$Q(x,y)=-2y\cos^2(x)$$

ואז

$$P_y=2y\sin(2x)\quad Q_x=4y\cos(x)\sin(x)=2y\sin(2x)$$

ולכן היא מדויקת. כעת נגדיר

$$U(x,y)=\int Q(x,y)\,\mathrm{dy}=-y^2\cos^2(x)+c(x)$$

ונמצא את $c(x)$. כיוון שצריך $U_x=P$, נשווה בניהם:

$$U_x=2y^2\cos(x)\sin(x)+c'(x)=1+y^2\sin(2x)$$

$$y^2\sin(2x)+c'(x)=1+y^2\sin(2x)$$

לכן $c'(x)=1$ ומכאן ש $c(x)=x$. סה"כ נקבל ש $U(x,y)=C$ או

$$-y^2\cos^2(x)+x=C$$

ולכן

$$\pm\sqrt{\frac{x+C}{\cos^2(x)}}=y$$

ונציב תנאי התחלה.

$$-2=y(0)=\pm\sqrt{\frac{0+C}{\cos^2(0)}}=\pm\sqrt{C}$$

ולכן צריך לבחור את הפתרון החיובי ובנוסף $C=4$. לסיכום:

$$.y=-\sqrt{\frac{x+4}{\cos^2(x)}}$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y''-2y'+y=xe^{2x}$ המקיים $.y(0)=0,y'(0)=0$

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $.y''-2y'+y=0$ הפולינום האופייני שלה

$$p(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x,xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$.y_h=C_1e^x+C_2xe^x$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x)=xe^{2x}$ שהוא פולינום מדרגה 1 שמוכפל ב e^{2x} (שמתאים ל 2 שהוא לא שורש של הפולינום האופייני), ננחש פתרון מהצורה $.y_p=(\alpha_0+\alpha_1x)e^{2x}$ מתקיים

$$\begin{aligned}
y_p' &= [2(\alpha_0+\alpha_1x)+\alpha_1]e^{2x}\\
y_p'' &= [4(\alpha_0+\alpha_1x)+2\alpha_1+2\alpha_1]e^{2x}=4(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1x)e^{2x}
\end{aligned}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned}
xe^{2x} &= 4(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1x)e^{2x}-2[2(\alpha_0+\alpha_1x)+\alpha_1]e^{2x}+(\alpha_0+\alpha_1x)e^{2x}\\
&= [4(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1x)-2[2(\alpha_0+\alpha_1x)+\alpha_1]+(\alpha_0+\alpha_1x)]e^{2x}\\
&= [(2\alpha_1+\alpha_0)+\alpha_1x]e^{2x}
\end{aligned}$$

ונקבל

$$x = (2\alpha_1 + \alpha_0) + \alpha_1 x$$

ולכן $\alpha_1 = 1$ ו $2\alpha_1 + \alpha_0 = 0$. ולכן $\alpha_0 = -2$. $\alpha_1 = 1, \alpha_0 = -2$. לסיכום:

$$y_p = (-2 + x)\, e^{2x}$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = (-2 + x)\, e^{2x} + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

ו

$$y' = (-3 + 2x)\, e^{2x} + C_1 e^x + C_2 (x + 1)\, e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$0 = y(0) = -2 + C_1$$

$$0 = y'(0) = -3 + C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 2$ ו $C_2 = 3 - C_1 = 1$. לסיכום:

$$.y = (-2 + x)\, e^{2x} + 2e^x + xe^x$$

.4

.5 כדור בעל מסה $m = 1\text{kg}$ נבעט לכיוון מעלה במהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. מה יהיה גובה הכדור ברגע שהמהירות הרגעית שלו תתאפס כאשר: (בשני הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$).

(א) הכח היחיד הפועל על הכדור הוא כח המשיכה mg.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$.

מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0) = 20$ (המהירות ההתחלתית 20 כלפי מעלה שהוא הכיוון החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = -g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt + 20$. המהירות תתאפס כאשר $y'(t) = 0$ או

$$gt = 20$$

כלומר לאחר $t = \frac{20}{g} = 2$ שניות. המיקום $y(t)$ שווה ל

$$y(t) = \int y' = -g\frac{t^2}{2} + 20t + C$$

ומתנאי ההתחלה $y(0) = 0$ נקבל

$$0 = C$$

לכן $y(t) = -g\frac{t^2}{2} + 20t$ והגובה שלו לאחר 2 שניות (הזמן שהמהירות מתאפסת) הוא

$$y(2) = -g\frac{4}{2} + 40 = 20.$$

(ב) הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה mg וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות v.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (כלומר $-g$). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $-g - v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g - v = ma = a$$

או $y''(t) = -g - y'(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + z = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = 1, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C - \int ge^{x}\mathrm{dx}\right) = e^{-x}\left(C - ge^{bx}\right) = e^{-x}C - g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-t}C - g$$

או

$$.y'(t) = e^{-t}C - g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה שהוא החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = e^{-0}C - g = C - g$$

ומכאן $C = 20 + g = 30$. קיבלנו $y'(t) = 30e^{-t} - g$ והמהירות מתאפס כאשר $y'(t) = 0$ או

$$g = 30e^{-t}$$

$$e^{-t} = \frac{1}{3}$$

$$-t = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

ולכן $t = \ln(3)$. המיקום הוא

$$y(t) = \int y' = \int \left(30e^{-t} - g\right) = -30e^{-t} - gt + C$$

ותנאי ההתחלה $y(0)=0$ יתן

$$0=-30+C$$

כלומר $C=30$ ו $y(t)=-30e^{-t}-gt+30$. הגובה בזמן $t=\ln(3)$ בו המהירות מתאפסת הוא

$$\begin{aligned} y\left(\ln(3)\right) &= -30e^{-(\ln(3))}-g\left(\ln(3)\right)+30 \\ &= -30\frac{1}{3}-10\ln(3)+30 \\ &= 20-10\ln(3) \end{aligned}$$