תרגול 7

1 בדצמבר 2015

גבולות חד צדיים

הגדרה 0.1 (גבול חד צדדי לפי הינה)
תהי $\{x_n\}$ סדרה המקיימת $x_n \to x_0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$: $x_n > x_0$. אם לכל סדרה כזאת מתקיים $f(x_n) \to L$ אזי $lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ ונקרא גבול מימין. באופן דומה נגדיר גבול משמאל : תהי $\{x_n\}$ סדרה כל שלכל $n \in \mathbb{N}$ $x_n < x_0$ אם לכל סדרה כזאת מתקיים $f(x_n) \to L$ אזי $lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ ונקרא גבול משמאל.

דוגמה: חשב את $lim_{x\to 5^+} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}}$

פתרון: $lim_{x\to 5^+} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}} = lim_{x\to 5^+} \frac{\sqrt{x-5}\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}\sqrt{x+5}} = lim_{x\to 5^+} \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}} = 0$
לא קיים כאן גבול משמאל משום שפונקציה שלנו אינה מוגדרת בסביבה שמאלית של 5 .
דוגמה: חשב את הגבול הימני ואת הגבול השמאלי של $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-2}}}$

פתרון: נתבונן קודם כל בפונקציה $\frac{1}{x-2}$: $lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$, $lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ ולכן $lim_{x\to 2^+} 2^{\frac{1}{x-2}} = \infty$, $lim_{x\to 2^-} 2^{\frac{1}{x-2}} = 0$ ולכן $lim_{x\to 2^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-2}}} = 0$, $lim_{x\to 2^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-2}}} = 1$

משפט 0.2 לפונקציה f קיים גבול בנק' $x = 2$ $\Longleftrightarrow$ קיימים הגבולות החד צדדיים בנק' זו ומתקיים:

$$L = lim_{x\to a} f(x) = lim_{x\to a^+} f(x) = lim_{x\to a^-} f(x)$$

דוגמה: הוכח כי לא קיים הגבול $lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

פתרון: קל לראות כי $lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ מצד שני $lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ קיבלנו שהגבולות החד צדדיים קיימים אך אינם שווים ולכן לא קיים גבול לפונקציה בנק' 0 .

תרגיל: חשב את הגבול של הפונק' $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & x \geq 2 \\ \frac{x}{2} & x < 2 \end{cases}$

פתרון: כאשר אנחנו שואפים ל־2 מימין הפונקציה שלנו שווה ל־x^2-3 ואז $lim_{x\to 2^+} x^2 - 3 = 1$
כאשר שואפים ל־2 משמאל אזי הפונקציה שלנו שווה ל־$\frac{x}{2}$ ולכן $lim_{x\to 2^-} \frac{x}{2} = 1$

קיבלנו ששני הגבולות קיימים ושווים ולכן הגבול של הפונקציה ב־$x=2$ הוא 1

טענה 0.3 $lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=lim_{x\to 0}\frac{x}{sin(x)}=1$

חחשב את הגבולות הבאים:

א) $lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2}$

פתרון: נשתמש בזהות טריגונומטרית: $1-cos\left(x\right)=2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$lim_{x\to 0}\frac{1-cos\left(x\right)}{2x^2}=lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3\cdot\frac{x^2}{4}\cdot 4}=\frac{1}{6}\left(lim_{x\to 0}\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\left(lim_{x\to 0}\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{1}{6}$$

ב) $lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-cos(x)}$

פתרון: ידוע ש־$\frac{\sqrt{3}}{2}=cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ונשתמש בשתי זהויות:

$$sin\left(x\right)=2sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$cos\left(x\right)-cos\left(y\right)=-2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

ונקכל:

$$lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-cos\left(x\right)}=lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\right)cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\right)}{-2sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}\right)sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\right)}=lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\right)}{sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right)}=2$$

ה) $lim_{x\to 0}\frac{sin(nx)}{sin(mx)}=lim_{x\to 0}\left(\frac{nx}{nx}\right)sin\left(nx\right)\left(\frac{mx}{mx}\right)\left(\frac{1}{sin(mx)}\right)=lim\left(\frac{nx}{mx}\right)\left(\frac{sin(nx)}{nx}\right)\left(\frac{mx}{sin(mx)}\right)=\frac{n}{m}$

ו) $lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$

פתרון: נשתמש שוב בזהות: $cos\left(x\right)=1-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$lim_{x\to 0}=\frac{1-\left(1-2sin^2\frac{x}{2}\right)}{x}=lim_{x\to 0}\frac{2sin\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$