פתרון מבחן לדוגמה בדידה להנדסה

27 בינואר 2015

1. הוכחה. הסתכלו בתרגול 12.
2. א. הוכחה:

כיוון אחד הוא טריוויאלי; אם $Y = f^{-1}(f(Y))$ לפי ההגדרה $g(f(Y)) = Y$ ולכן $Y \in Im(g)$.

לכיוון השני, $Y \in Im(g)$ ולכן קיימת X כך ש־$g(X) = Y$.

לפי ההגדרה, $f^{-1}(f(Y)) = \{a \in A | f(a) \in f(Y)\}$ ולכן ברור ש־$Y \subseteq f^{-1}(f(Y))$.

נניח בשלילה ששיוויון לא מתקיים, לכן קיים $x \notin Y$ כך ש־$f(x) \in f(Y)$.

אבל, לפי ההגדרה של $f(Y)$ קיים $y \in Y$ כך ש־$f(x) = f(y)$.

לכן, אם $Y = g(X) = f^{-1}(X) = \{a \in A | f(a) \in X\}$ נקבל $f(x) = f(y) \in X$ ולכן $x \in f^{-1}(X) = Y$ וסתירה!

לכן מתקיים השוויון $Y = f^{-1}(f(Y))$.

ב. הפרכה:

ניקח $B = \{1\}$, $A = \{1, 2\}$, $f(1) = f(2) = 1$.

כעת $g(\{1\}) = \{1, 2\}$, $g(\phi) = \phi$ ולכן g חח"ע, אך f אינה חח"ע ולכן לא הפיכה.

ג. הפרכה:

שוב, ניקח ניקח $B = \{1\}$, $A = \{1, 2\}$, $f(1) = f(2) = 1$.

ל־$\{2\} \in P(A)$ אין מקור ע"י g ולכן g לא על.

3. נבדוק האם שלוש התכונות מתקיימות:

א. רפלקסיביות:

לכל $A \in P(X)$, $|A \triangle A| = |\phi| = 0 < \aleph_0$ ולכן לפי הגדרת היחס, $(A, A) \in R$.

ב. סימטריות:

יהי $(A, B) \in R$. לכן, $|A \triangle B| < \aleph_0$. $A \triangle B = B \triangle A$ ולכן גם $|B \triangle A| < \aleph_0$ ולכן $(B, A) \in R$.

ג. טרנזיטיביות:

יהיו $(A, B), (B, C) \in R$. לכן:

$$|A \triangle B|, |B \triangle C| < \aleph_0$$

כעת, יהי $x \in A \triangle C$.

לכן, אם $x \in A$ אז $x \notin C$.

אם $x \in B$, אז $x \in B \triangle C$. אם $x \notin B$ אז $x \in A \triangle B$.

מצד שני, אם $x \notin A$ אז $x \in C$.

אם $x \in B$, אז $x \in A \triangle B$. אם $x \notin B$, אז $x \in B \triangle C$.

בכל מקרה, נקבל: $x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

לכן: $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

מכיוון ש־$|A \triangle B|, |B \triangle C| < \aleph_0$, גם $|(A \triangle B) \cup (B \triangle C)| < \aleph_0$, ולכן $|A \triangle C| < \aleph_0$.

לכן $(A, C) \in R$.

סה"כ היחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, ולכן זהו יחס שקילות.

4. התבוננו בתרגול 9.

5.א. יש לנו חמישה אטומים. לכן, הפסוק הראשון אינו מתאים מכיוון שיש בו רק ארבעה.

החלק הראשון של המשפט, אם...ואם...אז, לא מתאים לפסוק השלישי, שחלקו הראשון אומר אם...או אם...ו... , ולכן גם הפסוק השלישי לא מתאים.

אם כן, הפסוק השני הוא המתאים (בדקו שהוא אכן כזה).

ב. אם נשלול את הפסוק נקבל:

$$\neg(((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge (D \rightarrow \neg E))$$

לפי דה מורגן:

$$\neg(A \wedge B) \rightarrow C) \vee \neg(D \rightarrow \neg E)$$

נשלול את הגרירות לפי הכלל $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$:

$$((A \wedge B) \wedge \neg C) \vee (D \wedge E)$$