

לינארית להנדסה- פתרון תרגיל 12

תרגיל 1. חשבו את הדטרמיננטה הבאה

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

פתרון.

נבצע את פעולות השורה הבאות $R_i \leftarrow R_i + R_1$ ונקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_i \leftarrow R_i + R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

קבלנו מטריצה משולשית עליונה, הדטרמיננטה של מטריצה משולשית עליונה היא כפל אברי האלכסון לכן

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n = n!$$

תרגיל 2. ידוע כי המספרים 61902, 6327, 86469, 31882, 23028 מתחלקים ב-19 ללא שארית. הראו (ללא חישוב מפורש) ש-

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

גם כן מתחלק ב-19 ללא שארית. רמז: שימו לב שעמודות במטריצה הן המספרים המוזכרים בשאלה

פתרון.

נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned} 61902 &= 6 \cdot 10000 + 1 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \\ 6327 &= 0 \cdot 10000 + 6 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1 \\ 86469 &= 8 \cdot 10000 + 6 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 9 \cdot 1 \\ 31882 &= 3 \cdot 10000 + 1 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \\ 31882 &= 2 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 1 \end{aligned}$$

לכן אם נבצע את הפעולות שורה $R_5 \leftarrow R_5 + 10R_4 + 100R_3 + 1000R_2 + 10000R_1$ נקבל

$$\left| \begin{array}{ccccc} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 61902 & 6327 & 86469 & 31882 & 31882 \end{array} \right|$$

כעת נשתמש בנתון שהמספרים הללו ממתחלקים ב-19,

$$\left| \begin{array}{ccccc} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 61902 & 6327 & 86469 & 31882 & 31882 \end{array} \right| = 19 \cdot \left| \begin{array}{ccccc} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ \frac{61902}{19} & \frac{6327}{19} & \frac{86469}{19} & \frac{31882}{19} & \frac{31882}{19} \end{array} \right|$$

והביטוי שקבלנו מתחלק ב-19 ללא שארית.

תרגיל 3. יהא \mathbb{R}^n עם המכפלה הסקלארית. ויהא $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס אוני. נגדיר מטריצה $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך: עמודה j של

המטריצה P הוא הוקטור v_j . כלומר $P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

1. הוכיחו כי $P^t P = I$

2. הוכיחו $\det(P) \in \{1, -1\}$

פתרון.

1. מחישוב ישיר

$$[P^t P]_{i,j} = v_i^t \cdot v_j = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

כלומר $P^t P = I$

2. מכפלות הדטרמיננטה נקבל

$$|P^t| \cdot |P| = |I| = 1$$

כיון ש $|P^t| = |P|$ נקבל $|P|^2 = 1$ וכיון ש $|P|$ מספר ממשי נסיק כי $|P| \in \{\pm 1\}$

תרגיל 4. מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

נקראת בלוק ג'ורדן (אין זה מתייחס לחסימה של מייקל ג'ורדן) מסדר n

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

עם סקלר α מצאו את העי"ע והווקטורים העצמים של בלוק ג'ורדן מסדר 4, משמע המטריצה

פתרון.

ראשית נמצא λ כך שהפולינום האופייני מתאפס.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \alpha \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)^4$$

משמע $\lambda = \alpha$ הוא ע"ע היחיד של המטריצה. כעת נמצא את הווקטור העצמי עבורו

• $\lambda = \alpha$: צריך למצוא ווקטור v ששייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ מכאן הווקטור העצמי של } \lambda = \alpha \text{ הוא}$$

תרגיל 5. יהיה v וקטור עצמי של המטריצה A ששייך לערך העצמי λ .

1. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה A^k ($k \in \mathbb{N}$) ששייך לערך עצמי λ^k .
2. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה $A^3 - 2A + I$ ששייך לערך עצמי $\lambda^3 - 2\lambda + 1$.
3. הראה שאם $\lambda \neq 0$ אז x הוא ווקטור עצמי גם של A^{-1} (הנחה ש- A הפיכה)

פתרון.

1. נוכיח בעזרת אינדוקציה שמתקיים

$$A^k x = \lambda^k x$$

עבור $k = 1$

$$Ax = \lambda x$$

זה מתקיים כי נתון ש- x הוא ו"ע של A עבור ע"ע λ .
נניח את נכונות הטענה עבור $k - 1$.
נוכיח עבור k :

$$A^k x = \lambda^k x$$

נתחיל מאגף שמאל

$$A^k x = A^{k-1}(Ax) = A^{k-1}(\lambda x) = \lambda(A^{k-1}x) = \lambda(\lambda^{k-1}x) = \lambda^k x$$

2. צריך להראות ש-

$$(A^3 - 2A + I)x = (\lambda^3 - 2\lambda + 1)x$$

בעזרת חוק הפילוג זה שקול ל-

$$A^3 x - 2Ax + x = \lambda^3 x - 2\lambda x + x$$

אך אנחנו כבר ידועים ש-

$$\begin{cases} A^3 x = \lambda^3 x \\ Ax = \lambda x \end{cases}$$

ולכן

$$(A^3 - 2A + I)x = (\lambda^3 - 2\lambda + 1)x$$

מתקיים.

3. צריך להראות ש-

$$A^{-1}x = \mu x$$

עבור μ כלשהו.
ידוע ש-

$$Ax = \lambda x$$

לכן

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x$$

$$\downarrow$$

$$x = A^{-1}\lambda x$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1}x = \mu x$$

עבור $\mu = \frac{1}{\lambda}$

תרגיל 6. הוכיחו ש- A לא הפיכה אם ורק אם קיים לה עי"ע $\lambda = 0$

פתרון.
דבר הראשון נשים לב שבפרק הזה אנחנו מדברים רק על מטריצות ריבועיות!
← נניח ש- A לא הפיכה לכן למערכת משוואות

$$Ax = 0$$

קיים פתרון לא טריוואלי מכאן

$$Ax = 0 = 0 \cdot x$$

משמע 0 הוא עי"ע של A .
⇒ נניח ש- $\lambda = 0$ הוא עי"ע של A , לכן

$$Ax = 0 \cdot x = 0$$

כלומר קיים פתרון לא טריוואלי למערכת ההומגנית, לכן A אינה הפיכה.

תרגיל 7. עבור אילו ערכי a המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה

1. מעל \mathbb{R}

2. מעל \mathbb{C}

פתרון.
ראשית נמצא את העי"ע של המטריצה

$$p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -a \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 1) [(\lambda - 1)^2 - a] = (\lambda - 1) [\lambda - 1 + \sqrt{a}] [\lambda - 1 - \sqrt{a}] \lambda$$

לכן הע"ע הם $\lambda = 1, 1 - \sqrt{a}, 1 + \sqrt{a}$

- אם $a > 0$ אז יש לנו שלושה ע"ע ממשיים שונים ולכן היא לכסינה ב- \mathbb{R} וב- \mathbb{C}
- אם $a < 0$ אז יש לנו שלושה ע"ע מרוכבים שונים ולכן היא לכסינה ב- \mathbb{C} אבל לא לכסינה ב- \mathbb{R}
- אם $a = 0$ אז יש לנו ע"ע אחד ($\lambda = 1$) הוא בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1 ולכן היא איננה לכסינה (לא ב- \mathbb{C} ולא ב- \mathbb{R})

תרגיל 8. עבור אילו ערכי k המטריצה $\begin{pmatrix} k + 3 & 0 & 0 \\ -k - 3 & k & k + 3 \\ -k - 3 & k & k + 3 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה מעל \mathbb{R}

פתרון. :

ראשית נמצא את העי"ע של המטריצה

$$p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - (k+3) & 0 & 0 \\ k+3 & \lambda - k & -(k+3) \\ k+3 & -k & \lambda - (k+3) \end{pmatrix} \right| = (\lambda - (k+3)) [(\lambda - k)(\lambda - (k+3)) - k(k+3)] =$$

$$= (\lambda - (k+3)) [(\lambda - k)(\lambda - (k+3)) - k(k+3)] = \lambda(\lambda - (k+3))(\lambda - (2k+3))$$

לכן הע"ע הם $\lambda = 0, k+3, 2k+3$ אם $k \neq -3, 0, -\frac{3}{2}$. כל העי"עים שונים לכן היא לכסינה.

- עבור $k = -3$ העי"עים הם $\lambda = 0, 0, -3$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה לריבוי האלגברי (שווה ל-2) ולכן היא לכסינה.
- עבור $k = 0$ העי"עים הם $\lambda = 0, 3, 3$ הריבוי הגאומטרי של 3 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2 ולכן היא לא לכסינה.
- עבור $k = -\frac{3}{2}$ העי"עים הם $\lambda = 0, \frac{3}{2}, 0$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2 ולכן היא לא לכסינה. לסיכום המטריצה לא לכסינה עבור $k = 0, -\frac{3}{2}$

פתרון.

: ראשית נמצא את העי"ע של המטריצה

$$p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - (k+3) & 0 & 0 \\ k+3 & \lambda - k & -(k+3) \\ k+3 & -k & \lambda - (k+3) \end{pmatrix} \right| = (\lambda - (k+3)) [(\lambda - k)(\lambda - (k+3)) - k(k+3)] =$$

$$= (\lambda - (k+3)) [(\lambda - k)(\lambda - (k+3)) - k(k+3)] = \lambda(\lambda - (k+3))(\lambda - (2k+3))$$

לכן הע"ע הם $\lambda = 0, k+3, 2k+3$

פתרון. אם $k \neq -3, 0, -\frac{3}{2}$ כל העי"עים שונים לכן היא לכסינה.

- עבור $k = -3$ העי"עים הם $\lambda = 0, 0, -3$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה לריבוי האלגברי (שווה ל-2) ולכן היא לכסינה.
- עבור $k = 0$ העי"עים הם $\lambda = 0, 3, 3$ הריבוי הגאומטרי של 3 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2 ולכן היא לא לכסינה.
- עבור $k = -\frac{3}{2}$ העי"עים הם $\lambda = 0, \frac{3}{2}, 0$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2 ולכן היא לא לכסינה. לסיכום המטריצה לא לכסינה עבור $k = 0, -\frac{3}{2}$

תרגיל 9. הוכח או הפוך: האם העתקות הבאות הן העתקות לנאריות?

1. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix}$$

2. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x+2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. תהי $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה כלשהי. תהי $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ נגדיר

$$T(A) = AB - BA$$

פתרון.

1. • משמרת חיבור-

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= \\ T\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) &= \\ \begin{pmatrix} 5(x_1 + x_2) \\ -3(y_1 + y_2) \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 5x_1 \\ -3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5x_2 \\ -3y_2 \end{pmatrix} &= \\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

• משמרת כפל בסקלר

$$\begin{aligned} T\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \\ T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 5\alpha x \\ -3\alpha y \end{pmatrix} &= \\ \alpha \begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix} &= \\ \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

כלומר העתקה $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix}$ מקיימת את שתי התכונות ולכן היא העתקה לינארית

2. • משמרת חיבור-

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) &= \\ T\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) &= \\ \begin{pmatrix} 1 \\ (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) \\ 0 \end{pmatrix} &= \end{aligned}$$

בעוד ש-

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1 \\ (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) \\ 0 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 2 \\ (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) \\ 0 \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

ההעתקה $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x + 2y \\ 0 \end{pmatrix}$ אינה משמרת חיבור ולכן אינה העתקה לינארית

3. • משמרת חיבור-

$$\begin{aligned} T(A_1 + A_2) &= \\ (A_1 + A_2)B - B(A_1 + A_2) &= \\ A_1B + A_2B - BA_1 - BA_2 &= \\ A_1B - BA_1 + A_2B - BA_2 &= \\ T(A_1) + T(A_2) & \end{aligned}$$

משמרת כפל בסקלר

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &= \\ (\alpha A)B - B(\alpha A) &= \\ \alpha(AB - BA) &= \\ \alpha T(A) & \end{aligned}$$

תרגיל 10. תהי T העתקה לינארית הוכיחו ש-

1. $T(0) = 0$

2. יהיו v_1, \dots, v_n כך ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל הוכח ש- v_1, \dots, v_n גם כן בת"ל

3. יהיו v_1, \dots, v_n בת"ל ו- T חייב (כמו שהוגדר בבדידה) הוכיחו ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל

פתרון.

1.

$$\begin{aligned} T(0) &= T(0+0) = T(0) + T(0) \\ &\downarrow \\ 0 &= T(0) \end{aligned}$$

2. יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש-

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$$

צ"ל $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$$\begin{aligned} 0 = T(0) &= T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) \\ &\downarrow \\ \alpha_1 = \dots = \alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

3. יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש-

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = 0$$

צ"ל $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = 0$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) &= 0 \end{aligned}$$

אבל ידוע שגם $T(0) = 0$ ו- T חייב לכן

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i &= 0 \\ &\downarrow \\ \alpha_1 = \dots = \alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

תרגיל 11. מצאו הע"ל $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ כך ש- $Im(T) = Span\{1 + 2x, x^2 + x\}$ ו- $ker(T) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

פתרון.

כדי לקיים את התנאי של $ker(T) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ נדרוש ש- $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ נשלים את הווקטור לבסיס

ל- \mathbb{R}^3 על ידי הוספת הווקטורים $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואת הווקטורים הללו נשלח לאברי הבסיס של Im כלומר בסה"כ יש למצוא

ה"ל המקיימת

פתרון.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 2x, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x^2 + x$$

כעת נפעיל את משפט ההגדרה ונקבל

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= cT \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a-c)T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (b-c)T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= c \cdot 0 + (a-c)(1+2x) + (b-c)(x^2+x) = \\ &= (b-c)x^2 + (b-3c+2a)x + (a-c) \end{aligned}$$

בהצלחה!!