תורת הקבוצות- השלמה

טענה: ההיררכייה של בורל נעצרת ב$\aleph_1$.
הוכחה: נוכיח ש $\bigcup\limits_{\alpha<\aleph_1} \sum_{\alpha}^{0} \subseteq \sum_{\aleph_1}^{0}$.

תהי A קבוצה ב $\sum_{\aleph_1}^{0}$. זה אומר שקיימות קבוצות $A_1, A_2, A_3, ...$ כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ יש $\alpha_i < \aleph_1$ כך ש: $A_i \in \sum_{\alpha_i}^{0}$, ו $A = \bigcup A_i$.
כידוע, $\mathrm{cof}(\aleph_1) = \aleph_1$, ולכן כל סדרה של ω סודרים מתחת ל$\aleph_1$ חסומה. כלומר, יש $\gamma < \aleph_1$ כך ש $\forall i \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \gamma$.
זה אומר ש: $\bigcup\limits_{\alpha<\aleph_1} \sum_{\alpha}^{0} \subseteq \sum_{\gamma}^{0} \ni A$.