3.

5. יהיו שני טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ עם רדיוסי התכנסות r_1, r_2

א. הוכיחו/הפריכו: רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ הוא $\min\{r_1,r_2\}$

<u>הפרכה:</u>

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס בתחום $|x|<1$ ולכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא $r=1$ וכך כמובן גם המצב עבור מינוס הטור $\sum_{n=0}^{\infty} -x^n$.

טור הסכום הוא $\sum_{n=0}^{\infty} 0$ המתכנס בכל הממשיים ולכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא $\infty \neq \min\{1,1\}$

ב. נתון כי $r_1 \neq r_2$. הוכיחו את הטענה בסעיף א'

<u>הוכחה:</u>

נניח כי $r_1 > r_2$. לכן בתחום $|x|<r_2$ שני הטורים מתכנסים, ולכן גם הסכום שלהם מתכנס.

בתחום $r_2<|x|<r_1$ טור אחד מתכנס, והשני מתבדר, ולכן הסכום שלהם מתבדר.

לכן $r_2=\min\{r_1,r_2\}$ הוא המספר הגדול ביותר כך שסכום הטורים מתכנס עבור $|x|$ שקטן ממנו, כלומר הוא רדיוס ההתכנסות של הטור.

שימו לב, הוכחה זו לא עובדת בסעיף א', כי במצב ש $r_1=r_2$ בתחום $r_1<|x|$ שני הטורים מתבדרים וייתכן שהסכום שלהם דווקא מתכנס, כמו שראינו בדוגמא.

4. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ המתכנסת במ"ש בקטע A לפונקצית הגבול $f(x)$.

עוד נניח שלכל $x \in A, n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $f_n(x) \geq 1$.

א. הוכיחו כי לכל $x \in A$ מתקיים כי $f(x) \geq 1$.

יהי $x \in A$ לפי ההגדרה $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ כיוון שכל איברי הסדרה גדולים או שווים 1, כך גם הגבול.

ב. הוכיחו כי $\frac{1}{f_n(x)} \rightrightarrows \frac{1}{f}$ בקטע A.

כיוון ש $f_n(x) \to f(x) \neq 0$ נובע כי $\frac{1}{f_n(x)} \to \frac{1}{f}$.

נסמן את סדרות החסמים

$$d_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)|$$

$$c_n = \sup_A \left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right|$$

נתון $d_n \to 0$ צ"ל $c_n \to 0$

נפתח קצת

$$c_n = \sup_A \left|\frac{f(x) - f_n(x)}{f_n(x)f(x)}\right| \leq \sup_A |f(x) - f_n(x)| = d_n \to 0$$

אי השיוויון נכון כי שתי הפונקציות במכנה גדולות או שווה 1.

תרגיל: הפריכו את הסעיף כאשר מוותרים על הנתון שהפונקציות בסדרה גדולות שווה 1 (תניחו חיוביות).

הערה: התכנסות במ"ש לפי קושי: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ בקטע A אם לכל $\epsilon > 0$ קיים מקום בסדרה N שהחל ממנו (לכל $n > N$) ולכל $x \in A$ מתקיים כי $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

2. א. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס או מתבדר $\int_0^1 \frac{1}{\ln(x)} dx$

ראשית צריך לבדוק נקודות בעייתיות, נבחן את הנקודות החשודות.

פונקציות אלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן, אין לנו קטע אינסופי, ולכן הנקודות החשודות הן נקודות אי ההגדרה 0,1.

רוצים לדעת האם הפונקציה חסומה בסביבת הנקודה הבעייתית או לא.

גבול הוא אחלה כלי שבדר"כ פותר את הבעייה

$$\frac{1}{\ln(x)} \to_{x \to 0^+} 0$$

$$\frac{1}{\ln(x)} \to_{x \to 1^-} (-\infty)$$

לכן מדובר באינטגרל לא אמיתי בגובה אינסופי, עם הנקודה הבעייתית היחידה 1.

נרצה לעשות מבחני השוואה, אבל מבחנים השוואה הם רק לאינטגרלים חיוביים, וזה אינטגרל שכולו שלילי בקטע.

לכן נבדוק את ההתכנסות של מינוס האינטגרל (היא כמובן זהה).

הערה: מבחנים ההשוואה בעצם יעילים עבור חיוביים ושליליים אבל לא לפונקציות מחליפות סימן.

נזיז את הנקודה הבעייתית לאפס

$$-\int_0^1 \frac{1}{\ln(x)} dx = \begin{Bmatrix} t = 1 - x \\ dt = -dx \end{Bmatrix} = \int_1^0 \frac{1}{\ln(1-t)} dt = -\int_{\boxed{0}}^1 \frac{1}{\ln(1-t)} dt$$

נשווה עם $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$

נחשב את גבול מנת הפונקציות בנקודה הבעייתית:

$$\lim_{t\to 0^+} -\frac{t}{\ln(1-t)} = \frac{0}{0}, L'Hopital = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{1-t}} = 1$$

לכן האינטגרלים חברים, וכיוון שהשווינו עם אינטגרל מתבדר, גם האינטגרל שלנו בשאלה מתבדר.

ב. מצאו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

זה לא טור!!!

הסבר- זה לא סס"ח!

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{8}$$

כלומר לא נוספים איברים על הקודמים, אלא כל סכום אינו קשור כלל לקודמו!

גם סנדביץ לא עוזר.

אז מה כן?

נזכור שעבור פונקציה f הרציפה בקטע $[0,1]$ מתקיים כי

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)dx$$

ננסה להציג את הסדרה בשאלה בצורה זו:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

כלומר בחרנו בפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ שאכן רציפה ב$[0,1]$.

ניסוי (ספויילר נגמר בהצלחה בסוף – נציב $k = xn$):

$$\frac{n^2}{n^2+k^2} = \left\{\begin{matrix} \frac{k}{n} = x \\ k = xn \end{matrix}\right\} = \frac{n^2}{n^2+n^2x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

6. קרבו את $\sin^2(1)$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{100}$.

ישנן שתי דרכים- פולינום עם שארית לגראנז' או טור והערכת שגיאה שלו.

אנחנו נבחר בטור (בגדול אם אפשר להגיע לטור, זה בדר"כ יותר קל).

ניתן להשתמש בזהות טריגו שתוריד את החזקה, כמו כן ניתן לגזור ולשים לב כי $(\sin^2(x))' = \sin(2x)$

ידוע

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

לכן

$$\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

נעשה אינטגרל בתחום ההתכנסות, (תחום ההתכנסות כאן הוא כל הממשיים).

$$\sin^2(1) = \int_0^1 \sin(2x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+2)(2n+1)!} 1^{2n+2}$$

זה טור לייבניץ, אפשר עם כלל המנה להראות שגודל האיברים שואף לאפס, והחל משלב מסויים הסדרה יורדת, וכמובן שהסימנים מתחלפים.

אז נסכום את האיברים עד ולא כולל הראשון שקטן מהשגיאה (כמובן אחרי השלב בו הסדרה מתחילה לרדת).

$$\sin^2(1) \approx 1 - \frac{8}{4!} + \frac{32}{6!} - \frac{128}{8!}$$

הערה: נניח היינו מקרבים את $\sin(1)$ אז יש לנו $a = \sin(1) + h$ אזי $a^2 = \sin^2(1) + 2\sin(1)\, h + h^2$

כלומר הטעות בקירוב ע"י a^2 היא $2\sin(1)\, h + h^2$ השגיאה מבוטאת ע"י מה שצריך לחשב אבל סינוס חסומה!

$$|2\sin(1)\, h + h^2| \le 2h + h^2 \le 3h$$

(בהנחה שבחרנו $h < 1$)

כלומר, אם נקרב את $\sin(1)$ עד שגיאה של $\frac{1}{300}$ העלה בריבוע תתן לנו פתרון.