

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{x \sin(x)}{e^x - 1}$. ב. $g(x) = x \cdot \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)$. ג. $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

2. פתרו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{e-1} \frac{\sin(\ln(x+1))}{x+1} dx$. ב. $\int \ln(x^2 + x + 1) dx$. ג. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

3. נביט בפונקציה $f(x) = x + \sin^2(x)$.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$ והוכיחו.

ב. הוכיחו/הפריכו: לכל $a \in \mathbb{R}$ קיים פתרון יחיד למשוואה $f(x) = a$.

4. תהי $f(x)$ המקיימת $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$, ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f''(x) \leq 0$.

א. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) \leq x$.

ב. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x^2$.

5. נביט בפונקציה $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

א. עבור איזה ערך של a הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$? הוכיחו שהיא אכן גזירה אז.

ב. מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $g(x) = e^x(x-1)$ בכל \mathbb{R} .

ג. הוכיחו כי $f(x)$ מונטונית עולה.